

NICHTLINEARE VERFAHREN BEI DER POLYNOMAPPROXIMATION

von
Manfred Hollenhorst
aus
Bonn

1976

Digitized by the Internet Archive
in 2026

NICHTLINEARE VERFAHREN BEI DER POLYNOMAPPROXIMATION

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur
Erlangung des Doktorgrades



vorgelegt
von
Manfred Hollenhorst
aus
Bonn

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaft-
lichen Fachbereichen der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 26.2.1976

Vorsitzender der Promotionskommission: Prof. Dr. H. Remmert

Erstberichterstatter: Prof. Dr. G. Meinardus

Zweitberichterstatter: Prof. Dr. L. Elsner

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
§ 1 Verbesserung der unteren Schranke für die Minimalabweichung mit Hilfe einer Voriterationsformel	9
a) Herleitung der Voriterationsformel	9
b) Gewisse Werte der Fehlerfunktion bei Approximation an den Tscheby- scheff - Knoten	17
c) Verbesserte untere Schranken	26
§ 2 Fehlerabschätzungen beim Verfahren von Darlington	37
a) Beschreibung des Verfahrens	
b) Vergleich mit der Minimalabweichung bei Approximation von Polynomen höheren Grades (monoton fallende Koeffizienten)	48
c) Vergleich mit der Minimalabweichung bei Approximation von Polynomen höheren Grades (betragsmäßig fallende Koeffizienten)	58

d) Vergleich mit der Minimalabweichung bei Approximation von holomorphen Funktionen	70
e) Vergleich mit den Partialsummen der Entwicklung nach Tschebyscheff- Polynomen	77
§ 3 Allgemeine Normabschätzungen und Minimalitätsaussagen für nichtlineare Approximationsverfahren	82
a) Definition der Approximations- operatoren	82
b) Normen von Approximations- operatoren	91
c) Minimalität bei Approximations- operatoren	105
§ 4 Numerische Verfahren und Ergebnisse	116
a) Beschreibung der Verfahren	116
b) Numerische Ergebnisse	129
Literaturverzeichnis	155

E i n l e i t u n g

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Verfahren, die Näherungspolynome vom Grad n zu gewissen auf einem reellen Intervall I (o.B.d.A. $I = [-1,1]$) stetigen Funktionen liefern, aber nicht wie z.B. die Interpolation an $n + 1$ festen Punkten lineare Projektionsoperatoren auf den Raum Π_n der Polynome vom Grad $\leq n$ sind. Zur Bestimmung einer polynomialen Näherung im Sinn der Tschebyscheff-Norm sind nämlich lineare Projektionsoperatoren nicht sehr geeignet, da bei allen diesen Operatoren die Norm der Fehlerfunktion bei Anwendung auf gewisse Funktionen f um einen Faktor mindestens von der Größenordnung $\frac{4}{\pi^2} \log n$ größer als die Minimalabweichung $E_n(f)$ bei der Tschebyscheff-Approximation durch Polynome vom Höchstgrad n ist.

Ein Verfahren, das im obigen Sinne nichtlinear ist, wird durch die Voriterationsformeln von Meinardus [62] (s. auch Meinardus [67], S.121) gegeben. Bei diesen erhält man gegenüber den Tschebyscheffschen Knoten

$$\xi_k = -\cos \frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 0, 1, \dots, n+1)$$

verbesserte, von der zu approximierenden Funktion f abhängige Ausgangsreferenzen $\{\xi_{0,f}, \xi_{1,f}, \dots, \xi_{n+1,f}\}$,

indem man einen Schritt des Newton-Verfahrens zur Bestimmung der besten Approximation näherungsweise ausführt. Dieses Newton-Verfahren ist wiederum eine Annäherung an den Remez-Algorithmus, bei dem in jedem Schritt die untere Schranke für die Norm der Fehlerfunktion verbessert wird. Diese untere Schranke erhält man, indem man die dividierte Differenz an den $n + 2$ Punkten der Referenz (dividiert durch ihre Norm als lineares Funktional auf dem Raum $C(I)$ der auf $[-1,1]$ stetigen Funktionen) anwendet auf die zu approximierende Funktion. Ist nun die Entwicklung

$$(1) \quad f = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k$$

einer auf $[-1,1]$ stetigen Funktion nach den Tschebyscheff-Polynomen T_k gegeben, so wählen wir die Punkte

$$(1a) \quad x_{k,f} = -\cos\left(\frac{k\pi}{n+1} - 2 \sum_{\ell=1}^{m-1} \frac{c_{n+1+\ell}}{c_{n+1}(n+1)} \sin \frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n+1) \quad ,$$

die nahe der aus der Voriterationsformel gewonnenen Referenz liegen; hierbei ist $m \in \{2, \dots, 2n+1\}$. Wir können dann unter gewissen, ziemlich einschränkenden Voraussetzungen an c_{n+1} , c_{n+2} , (s. §1, (4) u. (5)) zeigen, daß

$$\frac{|\Delta^{n+1}(f; x_{0,f}, \dots, x_{n+1,f})|}{||\Delta^{n+1}(\dots; x_{0,f}, \dots, x_{n+1,f})||} > \frac{|\Delta^{n+1}(f; \xi_0, \dots, \xi_{n+1})|}{||\Delta^{n+1}(\dots; \xi_0, \dots, \xi_{n+1})||}$$

gilt,

daß also ein "Aufstieg" wie beim Remez-Verfahren stattfindet. Wir können z.B. voraussetzen, daß $c_{n+1} \neq 0$,

$$|c_{n+1+\ell}| \leq \gamma^\ell |c_{n+1}|$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und

$$|c_{n+2}| = \gamma |c_{n+1}|$$

gilt, wobei im Fall $m = 2$

$$\gamma \leq 0,175$$

und im Fall $m = 3$

$$\gamma \leq 0,23$$

sein muß. Im Fall $m = 2$ können wir außerdem einen asymptotischen Ausdruck für die untere Schranke angeben :

$$\frac{\Delta_{n+1}(f; x_{0,f}, \dots, x_{n+1,f})}{||\Delta_{n+1}(\dots; x_{0,f}, \dots, x_{n+1,f})||} =$$

$$= \frac{c_{n+1} - \sum_{j=1}^{\left[1 + \frac{\log n}{|\log \gamma|}\right]} \frac{c_{n+1+j}}{j!} \left(\frac{-2c_{n+2}}{c_{n+1}}\right)^j}{I_0\left(\frac{2c_{n+2}}{c_{n+1}}\right)} \left(1 + o\left(\frac{\log n}{n}\right)\right),$$

wobei I_0 die Besselfunktion nullter Ordnung mit imaginärem Argument bezeichnet.

Während wir bei diesem Verfahren der Voriteration nicht nachweisen konnten, daß auch die Norm der Fehlerfunktion bei Tschebyscheff-Approximation von f in den Punkten $x_{0,f}, \dots, x_{n+1,f}$ dasselbe asymptotische Verhalten zeigt wie die Minimalabweichung $E_n(f)$, konnten wir dies unter gewissen Voraussetzungen für das folgende Verfahren von Darlington [70] zeigen. In diesem Verfahren bestimmt man, ausgehend von der Entwicklung (1) auf dem Umweg über ein Approximationsproblem im Komplexen ein Polynom $p_{n,m}$ ($n \in \mathbb{N}$, $m \in \{2, 3, \dots\}$) so, daß

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} c_k T_k - p_{n,m}$$

mindestens $n+2$ mal angenähert alterniert und wählt als Näherung an f das Polynom

$$p_{n,m}^* = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n c_k T_k + p_{n,m}.$$

Numerisch sind zur Bestimmung von $p_{n,m}^*$ die Koeffizienten $c_0, c_1, \dots, c_{n+m}$ der Entwicklung nach Tschebyscheff - Polynomen zu berechnen, der betragsmaximale Eigenwert einer $m \times m$ - Matrix und der zugehörige Eigenvektor zu bestimmen sowie eine Division von Polynomen auszuführen.

Ist $c_{n+1} \neq 0$ und gilt

$$(2) \quad 0 < c_{n+m} \leq \gamma c_{n+m+1} \leq \gamma^2 c_{n+m-2} \leq \dots$$

$$\dots \leq \gamma^{m-2} c_{n+2} \leq \gamma^{m-1} c_{n+1}$$

mit einem γ zwischen 0 und 1 ,

so beweisen wir

$$\frac{\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} c_k T_k - p_{n,m} \right| - E_n \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} c_k T_k \right)}{E_n \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} c_k T_k \right)} \leq 2\gamma^{n+1} (n+m-1)^{m-2} K(\gamma, m)$$

wobei die Funktion K von n unabhängig ist (s. §2, Satz 1). Gilt andererseits

$c_{n+1} \neq 0$ und

$$(3) \quad |c_{n+1+j}| \leq \gamma^j |c_{n+1}|$$

für $j = 1, \dots, m-1$ mit einem γ zwischen 0 und 0,434 ,

so zeigen wir

$$\frac{\left| \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} c_k T_k - p_{n,m} \right| \right| - E_n \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} c_k T_k \right)}{E_n \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} c_k T_k \right)} \leq \frac{2\gamma \left(\gamma \frac{2-3\gamma^2}{1-2\gamma^2} \right)^{n+1}}{1-2\gamma-2\gamma^2+3\gamma^3}$$

Um zu erreichen, daß

$$\left| \left| f - p_{n,m}^* \right| \right| = E_n(f) (1+o(1))$$

gilt, setzen wir zusätzlich voraus, daß m_n von n abhängig gewählt wird mit

$$\frac{|c_{n+m_n}|}{|c_{n+1}|} = o(1)$$

und mit

$$\left| c_{n+m_n+l} \right| \leq \delta^{\ell-1} \left| c_{n+m_n+1} \right| \quad (\ell \in \mathbb{N}) \quad ,$$

wobei $\delta < 1$ sein muß.

Sind die Koeffizienten $c_{n+1}, c_{n+2}, \dots$ alle nicht-negativ, die Voraussetzungen (2) oder (3) erfüllt und n hinreichend groß, so ist, wie wir auch in §2 zeigen,

$$\left| \left| f - p_{n,m}^* \right| \right|$$

kleiner als die Norm des Fehlers beim Abbrechen der Entwicklung (1) nach Tschebyscheff-Polynomen.

Weiterhin fassen wir die Tschebyscheff-Approximation $A_n f$ an f in den mit Hilfe der Voriterationsformeln bestimmten Punkten $\xi_{0,f}, \xi_{1,f}, \dots, \xi_{n+1,f}$ und ähnliche Verfahren B_n auf als semilineare Abbildungen einer Teilmenge D_n des Raumes $C(I)$ auf Π_n , die beschränkt sind in dem Sinne, daß

$$\|B_n\|_{D_n} := \sup \left\{ \frac{\|B_n f\|}{\|f\|} \mid f \in D_n \setminus \{0\} \right\}$$

endlich ist. Wir zeigen u.a., daß für f wie in (1) mit

$$\sum_{\ell=1}^{m-1} \left| \frac{C_{n+1+\ell}}{C_{n+1}} \right| \ell^5 \leq \frac{M}{4},$$

wo M eine feste reelle Zahl ist, die Abschätzung

$$\|A_n f\| \leq \|f\| \frac{2}{\pi} \log n (1+o(1))$$

gilt. Außerdem zeigen wir, daß für gewisse semilineare beschränkte Abbildungen $B_n: D_n \rightarrow \Pi_n$ gilt

$$\|I - B_n\|_{D_n} = 1 + \|B_n\|_{D_n}$$

und können daraus die Äquivalenz von verschiedenen

Minimalitätsaussagen über solche Abbildungen herleiten.

Im Schlußteil der Arbeit wird über numerische Ergebnisse berichtet, die die Anwendung der oben beschriebenen Verfahren auf verschiedene Funktionen liefert.

Dabei zeigt sich insbesondere, daß erstens bei niedrigen Graden die Punkte $x_{k,f}$ aus (1a) mit $m=2$ im allgemeinen eine wesentliche Verbesserung der unteren Schranke liefern und zweitens die Norm der Fehlerfunktion bei Approximation an diesen Punkten in den meisten Fällen kleiner ist als die Fehlernorm des Näherungspolynoms $p_{n,m}^*$, das mit Hilfe des Verfahrens von Darlington bestimmt wird.

§ 1 Verbesserung der unteren
Schranke für die Minimalab-
weichung mit Hilfe einer
Voriterationsformel

a) Herleitung der Voriterationsformel

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst die Approximation durch trigonometrische Polynome betrachten; wir gehen also aus von

$$g(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v \cos v\varphi + b_v \sin v\varphi)$$

für $\varphi \in [-\pi, \pi]$ und bestimmen dasjenige trigonometrische Polynom $\sigma_{n,g}$ vom Grad $\leq n$ mit

$$\sigma_{n,g}(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{v=1}^n (\alpha_v \cos v\varphi + \beta_v \sin v\varphi) \quad ,$$

das in den Punkten

$$\theta_k = \frac{k\pi}{n+1} \quad (k = -n, -n+1, \dots, n+1)$$

die beste Tschebyscheff-Approximation an g unter den trigonometrischen Polynomen vom Grad $\leq n$ liefert.

Wir bemerken zunächst

$$(1a) \quad \sum_{k=-n}^{n+1} \cos \frac{\nu k \pi}{n+1} \cos \frac{\mu k \pi}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\sum_{k=-n}^{n+1} \left(e^{\frac{i(\nu-\mu)k\pi}{n+1}} + e^{\frac{i(\nu+\mu)k\pi}{n+1}} \right) \right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } \nu+\mu \not\equiv 0 \pmod{2n+2} \\ & \text{und } \nu-\mu \not\equiv 0 \pmod{2n+2} \\ 2(n+1) & \text{falls } \nu-\mu \equiv 0 \pmod{2n+2} \\ & \text{und } \nu+\mu \equiv 0 \pmod{2n+2} \\ n+1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und erhalten ebenso

$$(1b) \quad \sum_{k=-n}^{n+1} \sin \frac{\nu k \pi}{n+1} \sin \frac{\mu k \pi}{n+1} = \begin{cases} n+1 & \text{falls } \nu-\mu \equiv 0 \pmod{2n+2} \\ & \text{und } \nu+\mu \not\equiv 0 \pmod{2n+2} \\ -n-1 & \text{falls } \nu-\mu \not\equiv 0 \pmod{2n+2} \\ & \text{und } \nu+\mu \equiv 0 \pmod{2n+2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$(1c) \quad \sum_{k=-n}^{n+1} \sin \frac{\nu k \pi}{n+1} \cos \frac{\mu k \pi}{n+1} = 0 \quad \text{für alle } \nu, \mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Wenn wir nun

$$\lambda_k = \frac{\cos \frac{k(n+1)\pi}{n+1}}{2n+2} = \frac{(-1)^k}{2n+2}$$

wählen, so ist durch

$$L_{n,0}(f) = \sum_{k=-n}^{n+1} \lambda_k f(\theta_k)$$

ein lineares Funktional $L_{n,0}$ auf $C[-\pi, \pi]$ gegeben, das auf allen trigonometrischen Polynomen vom Grad $\leq n$ verschwindet und die Norm 1 hat, und nach Meinardus [67], Thm.21, ergibt sich, daß $\sigma_{n,g}$ die Funktion

$$g(\varphi) - L_{n,0}(g) \cos[(n+1)\varphi]$$

in den Punkten θ_k ($k = -n, -n+1, \dots, n+1$) interpoliert. Mit Hilfe der diskreten Orthogonalitätsrelationen (1a), (1b), (1c) kann man aus dieser Tatsache die Koeffizienten von $\sigma_{n,g}$ bestimmen:

$$\alpha_v = a_v + \sum_{r=1}^{\infty} (a_{r(2n+2)+v} + a_{r(2n+2)-v}) \quad (v = 0, 1, \dots, n)$$

$$\beta_v = b_v + \sum_{r=1}^{\infty} (b_{r(2n+2)+v} - b_{r(2n+2)-v}) \quad (v = 1, \dots, n)$$

und erhält

$$e_n(\varphi) = g(\varphi) - \sigma_{n,g}(\varphi) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{2n+1} \left\langle a_{(2r+1)(n+1)+k} \left(\cos \langle [(2r+1)(n+1)+k]\varphi \rangle - \cos \langle (n+1-k)\varphi \rangle \right) \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + b_{(2r+1)(n+1)+k} \left(\sin \langle [(2r+1)(n+1)+k]\varphi \rangle - \sin \langle (k-n-1)\varphi \rangle \right) \rangle \\
 & + a_{(2r+1)(n+1)} \cos [(2r+1)(n+1)\varphi] + b_{(2r+1)(n+1)} \sin [(2r+1)(n+1)\varphi] \Big] \\
 & = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{2n+1} \left\langle -2a_{(2r+1)(n+1)+k} \sin [(r+1)(n+1)\varphi] \sin \langle [r(n+1)+k]\varphi \rangle \right. \right. \\
 & + 2b_{(2r+1)(n+1)+k} \sin [(r+1)(n+1)\varphi] \cos \langle [r(n+1)+k]\varphi \rangle \Big\rangle \\
 & \left. + a_{(2r+1)(n+1)} \cos [(2r+1)(n+1)\varphi] + b_{(2r+1)(n+1)} \sin [(2r+1)(n+1)\varphi] \right]
 \end{aligned}$$

insbesondere

$$e_n(\theta_k) = (-1)^k L_{n,0}(g) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{(2r+1)(n+1)} (-1)^k .$$

Eine analoge Aussage über die Polynomapproximation findet sich z.B. bei Hornecker [60].

Entsprechend dem Vorgehen von Meinardus [62], [67] S.120 bestimmen wir eine gegenüber den θ_k verbesserte Ausgangsreferenz durch die vereinfachte Anwendung eines Schrittes des Newton-Verfahrens zur Bestimmung der besten gleichmäßigen Approximation an g (s. z.B. Meinardus [67] S.114):

$$\theta_{k,g} \approx \theta_k - \frac{e'_n(\theta_k)}{e''_n(\theta_k)} \quad (k = -n, -n+1, \dots, n+1)$$

Zu diesem Zweck berechnen wir

$$e_n'(\varphi) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\sum_{v=1}^{2n+1} \left\{ -2a_{(2\ell+1)(n+1)+v} \right. \right. \\ \cdot \left\langle (\ell+1)(n+1) \cos[(\ell+1)(n+1)\varphi] \sin\langle [\ell(n+1)+v]\varphi \rangle \right. \\ \left. + [\ell(n+1)+v] \sin[(\ell+1)(n+1)\varphi] \cos\langle [\ell(n+1)+v]\varphi \rangle \right\rangle \\ \left. + 2b_{(2\ell+1)(n+1)+v} \left\langle (\ell+1)(n+1) \cos[(\ell+1)(n+1)\varphi] \cos\langle [\ell(n+1)+v]\varphi \rangle \right. \right. \\ \left. \left. - [\ell(n+1)+v] \sin[(\ell+1)(n+1)\varphi] \sin\langle [\ell(n+1)+v]\varphi \rangle \right\rangle \right\} \\ \left. - a_{(2\ell+1)(n+1)} (2\ell+1)(n+1) \sin[(2\ell+1)(n+1)\varphi] \right. \\ \left. + b_{(2\ell+1)(n+1)} (2\ell+1)(n+1) \cos[(2\ell+1)(n+1)\varphi] \right]$$

Ebenso könnten wir $e_n''(\varphi)$ berechnen; wir wollen jedoch, um einfache Ausdrücke für die $\theta_{k,g}$ zu erhalten, g durch die $n+m$ -te Partialsumme $\tilde{g}$ seiner Fourierentwicklung mit $2 \leq m \leq 2n+1$ sowie e_n durch

$$\tilde{e}_n = \tilde{g} - \sigma_{n,\tilde{g}}$$

ersetzen; dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}'_n(\theta_k) = & \sum_{v=1}^{m-1} \left\{ -2a_{n+1+v} (n+1)(-1)^k \sin(v\theta_k) + \right. \\ & \left. + 2b_{n+1+v} (-1)^k (n+1) \cos(v\theta_k) \right\} + b_{n+1} (n+1)(-1)^k \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}''_n(\theta_k) = & \sum_{v=1}^{m-1} \left\{ -4a_{n+1+v} (n+1)v(-1)^k \cos(v\theta_k) - \right. \\ & \left. - 4b_{n+1+v} v(n+1)(-1)^k \sin(v\theta_k) \right\} - a_{n+1} (n+1)^2 (-1)^k \end{aligned}$$

Setzen wir nun voraus, daß mit wachsendem n die a_{n+1+v} und b_{n+1+v} gegenüber a_{n+1} betragsmäßig durch M beschränkt bleiben sowie $m_n^2 = o(n)$ gilt, so erhalten wir

$$4 \left| \frac{\sum_{v=1}^{m-1} \left[a_{n+1+v} v \cos(v\theta_k) + b_{n+1+v} v \sin(v\theta_k) \right]}{(n+1)a_{n+1}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{8M \sum_{v=1}^{m-1} v}{(n+1)} = o(1)$$

und damit folgende verbesserte Ausgangsreferenz

$$\tilde{\varepsilon}_{k,g} := \theta_k + \frac{b_{n+1} + \sum_{v=1}^{m-1} \left\{ -2a_{n+1+v} \sin(v\theta_k) + 2b_{n+1+v} \cos(v\theta_k) \right\}}{(n+1)a_{n+1}}$$

$$(k = -n, -n+1, \dots, n+1)$$

wobei natürlich noch eine Reduktion mod 2π vorgenommen werden muß, sodaß

$$\theta_{k,g} \in [-\pi, \pi]$$

$$\gamma_{k,g} \equiv \theta_{k,g} \pmod{2\pi}$$

gilt.

Um eine entsprechende "Voriterationsformel" für den Fall der Polynomapproximation zu erhalten, gehen wir aus von einer auf dem Intervall $[-1,1]$ gegebenen stetigen Funktion mit der (quadratisch konvergenten) Entwicklung

$$f = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} T_{\ell}$$

(wobei der Strich am Summenzeichen hier wie im folgenden andeuten soll, daß der Summand bei $\ell = 0$ zu halbieren ist) bzw. von der $n+m$ -ten Partialsumme $\tilde{f}$ der Entwicklung nach den Tschebyscheff - Polynomen T_k

$$\tilde{f} = \sum_{\ell=0}^{n+m} a_{\ell} T_{\ell} \quad .$$

Wir bezeichnen mit $p_{n,\tilde{f}}$ die beste Tschebyscheff - Approximation an $\tilde{f}$ in den Punkten

$$\xi_k = -\cos \frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 0, \dots, n+1)$$

unter den Polynomen vom Höchstgrad n und berechnen

$$\tilde{f}'(\xi_k) - p'_{n,\tilde{f}}(\xi_k) = \frac{d}{dx} \tilde{e}_n \circ \arccos(x) \Big|_{x=\xi_k} = \tilde{e}'_n \left(\frac{(n+1-k)\pi}{n+1} \right) \frac{-1}{\sqrt{1-\xi_k^2}}$$

$$= \sum_{v=1}^{m-1} 2a_{n+1+v} (n+1) (-1)^{n+1-k} U_{v-1}(\xi_k)$$

$$\tilde{f}''(\xi_k) - p''_{n,\tilde{f}}(\xi_k) =$$

$$= \tilde{e}''_n \left(\frac{(n+1-k)\pi}{n+1} \right) (1-\xi_k^2)^{-1} + \tilde{e}'_n \left(\frac{(n+1-k)\pi}{n+1} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) (1-\xi_k^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2\xi_k$$

$$= - \left\{ a_{n+1} (n+1)^2 (-1)^{n+1-k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{v=1}^{m-1} a_{n+1+v} (n+1) \left[4vT_v(\xi_k) (-1)^{n+1-k} - 2\xi_k (-1)^{n+1-k} U_{v-1}(\xi_k) \right] \right\} (1-\xi_k^2)^{-1}$$

Damit ergibt sich, wenn man wie oben die Beschränktheit der a_{n+1+v} gegenüber a_{n+1} mit wachsendem n sowie $m_n^2 = o(n)$ voraussetzt, folgende verbesserte Ausgangsreferenz für die Polynomapproximation

$$(2) \quad x_{k,f} = \xi_k + \frac{2(1-\xi_k^2) \sum_{v=1}^{m-1} a_{n+1+v} U_{v-1}(\xi_k)}{(n+1)a_{n+1}}$$

$$(k = 0, 1, \dots, n+1) \quad .$$

Für $m = 3$ erhält man die von Meinardus [62] (Formel (37)) hergeleiteten Punkte.

b) Gewisse Werte der Fehlerfunktion bei Approximation an
den Tschebyscheff - Knoten

Sei nun $p_{n,f}$ das Polynom höchsten n -ten Grades,
das die beste Tschebyscheff - Approximation an f in den
Punkten ξ_k ($k = 0, 1, \dots, n+1$) liefert;
wir wollen zeigen, daß unter gewissen Voraussetzungen mit $\epsilon = \operatorname{sgn} a_{n+1}$

$$(3) \quad \epsilon (-1)^{n+1-k} [f(\xi_{k,f}) - p_{n,f}(\xi_{k,f})] > [f(\xi_k) - p_{n,f}(\xi_k)] \epsilon (-1)^{n+1-k}$$

für $k = 1, \dots, n$ gilt, wenn wir im Fall $a_{n+1} \neq 0$

$$\left. \begin{aligned} \xi_{n+1-k,f} &:= \cos(\theta_k + \delta_k^{(m,n)}) \\ \delta_k = \delta_k^{(m,n)} &:= \frac{-2 \sum_{\ell=1}^{m-1} a_{n+1+\ell} \sin \ell \theta_k}{(n+1) a_{n+1}} \end{aligned} \right\} \quad (k = 0, 1, \dots, n+1)$$

setzen.

Wir wollen generell voraussetzen, daß

$$(4) \quad |a_{n+\ell+1}| \leq \gamma^\ell |a_{n+1}| \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}$$

mit einem $\gamma < 1$ gilt und außerdem

$$(5) \quad \beta^{(m,n)} := \min_{k=1, \dots, n} \frac{|\delta_k^{(m,n)}| (n+1)}{2 \sin \theta_k} > 0 \quad \text{ist.}$$

Die Voraussetzung (4) ist z.B. für eine unendliche Menge von natürlichen Zahlen n erfüllt, wenn f holomorph in einer Ellipse mit den Brennpunkten -1 und $+1$ und einer Halbachsensumme $> \gamma^{-1}$ ist.

Ist (4) erfüllt und

$$\left| \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right| = \gamma$$

sowie bei $m = 2$ $\gamma < 1$

bzw. bei $m = 3$ $\gamma < \frac{1}{2}$

bzw. bei $m > 3$ $\gamma \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,29289$

so gilt auch (5); denn dann ist für $m \geq 3$

$$(6) \quad \beta^{(m,n)} = \inf_{k=1, \dots, n} \frac{\left| \sum_{\ell=1}^{m-1} a_{n+1+\ell} U_{\ell-1}(\cos \theta_k) \right|}{|a_{n+1}|} \geq \left(\gamma - \sum_{\ell=2}^{m-1} \ell \gamma^\ell \right)$$

$$= \gamma \left[1 - \frac{d}{d\gamma} \left(\frac{\gamma^2 - \gamma^m}{1 - \gamma} \right) \right] = \gamma \frac{1 - 4\gamma + 2\gamma^2 + m\gamma^{m-1} - (m-1)\gamma^m}{(1-\gamma)^2},$$

und für $\gamma \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ergibt sich $\beta^{(m,n)} > 0$.

Wir entwickeln noch die Funktionen

$$A_{r,j} := a_{(2r+1)(n+1)+j} \left(T_{(2r+1)(n+1)+j} - T_{|n+1-j|} \right)$$

und zwar ist für $j = 1, \dots, 2n+1$ mit gewissen $\eta_{k,j}$ zwischen 0 und δ_k

$$A_{0,j}(\xi_{n+1-k}, f) =$$

$$= a_{n+1+j} \left\{ \sum_{\ell=1}^2 \frac{d^\ell}{d\theta^\ell} (\cos[(n+1+j)\theta] - \cos[(n+1-j)\theta]) \right\} \Big|_{\theta=\theta_k} \frac{\delta_k^\ell}{\ell!} +$$

$$+ \frac{d^3}{d\theta^3} (\cos[(n+1+j)\theta] - \cos[(n+1-j)\theta]) \Big|_{\theta=\theta+\eta_{k,j}} \frac{\delta_k^3}{3!} \Big\} =$$

$$= a_{n+1+j} (-1)^k \left\{ -2(n+1) \sin(j\theta_k) \delta_k - 2\delta_k^2 j(n+1) \cos j\theta_k + \right.$$

$$+ \frac{\delta_k^3}{6} \left\langle \sin[j\theta_k + (n+1+j)\eta_{k,j}] (n+1+j)^3 + \right.$$

$$\left. + \sin[j\theta_k - (n+1-j)\eta_{k,j}] (n+1-j)^3 \right\rangle \Big\}$$

Ebenso erhalten wir für $r \in \mathbb{N}$ und $j = 1, 2, \dots, 2n+1$ mit gewissen $\eta_{k,r,j}$ zwischen 0 und δ_k

$$A_{r,j}(\xi_{n+1-k}, f) = a_{(2r+1)(n+1)+j} \left\{ -(-1)^k (2r+2)(n+1) \sin(j\theta_k) \delta_k \right.$$

$$- \frac{\delta_k^2}{2} \left[\langle (2r+1)(n+1)+j \rangle^2 \cos[\langle (2r+1)(n+1)+j \rangle (\theta_k + \eta_{k,r,j})] - \right.$$

$$\left. - (n+1-j)^2 \cos[(n+1-j)(\theta_k + \eta_{k,r,j})] \right] \Big\}$$

sowie für $r = 0, 1, 2, \dots$ mit gewissen $\eta_{k,r,0}$ zwischen 0 und δ_k

$$T_{(2r+1)(n+1)}(\xi_{n+1-k}, f) = \\ = (-1)^k \left\{ 1 - (2r+1)^2 (n+1)^2 \frac{\delta_k^2}{2} \cos \left[(2r+1)(n+1) \eta_{k,r,o} \right] \right\}.$$

Fassen wir das Vorstehende zusammen, so erhalten wir

für $k = 1, \dots, n$

$$f(\xi_{n+1-k}, f) - p_{n,f}(\xi_{n+1-k}, f) = \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \left[a_{(2r+1)(n+1)} T_{(2r+1)(n+1)}(\xi_{n+1-k}, f) + \right. \\ \left. + \sum_{\ell=1}^{2n+1} A_{r,\ell}(\xi_{n+1-k}, f) \right] =$$

(7)

$$= a_{n+1} (-1)^k \left\{ \underbrace{1 - \frac{(n+1)^2 \delta_k^2}{2}}_{(6)} + \underbrace{\frac{(n+1)^2 \delta_k^2}{2} \langle 1 - \cos[(n+1) \eta_{k,0,0}] \rangle}_{(7)} \right\}$$

$$+ (n+1)^2 \delta_k \underbrace{\sum_{\ell=1}^{m-1} \frac{(-2) a_{n+1+\ell} \sin(\ell \theta_k)}{(n+1) a_{n+1}}}_{(8)} - 2 \delta_k^2 \underbrace{\sum_{\ell=1}^{m-1} \ell (n+1) \frac{a_{n+1+\ell}}{a_{n+1}} \cos \ell \theta_k}_{(9)} +$$

$$+ \frac{\delta_k^3}{6} \sum_{\ell=1}^{m-1} \frac{a_{n+1+\ell}}{a_{n+1}} \left\{ \sin^2[\ell \theta_k + (n+1+\ell) \eta_{k,\ell}] (n+1+\ell)^3 + \sin^2[\ell \theta_k - (n+1-\ell) \eta_{k,\ell}] (n+1-\ell)^3 \right\}$$

$$- 2 (n+1) \delta_k \underbrace{\sum_{j=m}^{2n+1} \frac{a_{n+1+j}}{a_{n+1}} \sin j \theta_k}_{(10)} - 2 \delta_k^2 (n+1) \underbrace{\sum_{j=m}^{2n+1} \frac{a_{n+1+j}}{a_{n+1}} j \cos j \theta_k}_{(11)} +$$

$$+ \frac{\delta_k^3}{6} \sum_{j=m}^{2n+1} \frac{a_{n+1+j}}{a_{n+1}} \left\{ \sin^2[j \theta_k + (n+1+j) \eta_{k,j}] (n+1+j)^3 + \sin^2[j \theta_k - (n+1-j) \eta_{k,j}] (n+1-j)^3 \right\}$$

$$+ \underbrace{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_{(2r+1)(n+1)}}{a_{n+1}}}_{(12)} - \frac{\delta_k^2 (n+1)^2}{2} \underbrace{\sum_{r=1}^{\infty} (2r+1)^2 \frac{a_{(2r+1)(n+1)}}{a_{n+1}} \cos[(2r+1)(n+1) \eta_{k,r,0}]}_{(13)} +$$

$$- (n+1) \delta_k \underbrace{\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{a_{(2r+1)(n+1)+j}}{a_{n+1}} (2r+2) \sin(j \theta_k)}_{(14)}$$

$$- \frac{\delta_k^2}{2} (-1)^k \underbrace{\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{a_{(2r+1)(n+1)+j}}{a_{n+1}} \left\{ [(2r+1)(n+1)+j]^2 \cos[(2r+1)(n+1) \eta_{k,r,j}] - (n+1-j)^2 \cos[(n+1-j) \eta_{k,r,j}] \right\}}_{(15)}$$

$$= (-1)^k \left[\sum_{r=0}^{\infty} a_{(2r+1)(n+1)} + \frac{(n+1)^2}{2} \delta_k^2 a_{n+1} \left(1 - \sum_{\ell=1}^g R_{i,k}^{(m,n)} \right) \right]$$

Jetzt schätzen wir noch die Restglieder

$R_{i,k}^{(m,n)}$ ($i = 1, \dots, 9$), die den unterstrichenen Termen in (7) entsprechen, unter den Voraussetzungen (4) und (5) ab.

$$R_{1,k}^{(m,n)} = 1 - \cos[(n+1)\eta_{k,0,0}] \geq 0$$

$$\begin{aligned} |R_{2,k}^{(m,n)}| &= \left| \frac{4}{n+1} \sum_{\ell=1}^{m-1} \ell \frac{a_{n+1+\ell}}{a_{n+1}} \cos \ell \theta_k \right| \leq \frac{4}{n+1} \sum_{\ell=1}^{m-1} \ell y^\ell = \frac{4y}{n+1} \frac{d}{dy} \left(\frac{y - y^m}{1-y} \right) \\ &= \frac{4y}{n+1} \frac{1 - my^{m-1} + (m-1)y^m}{(1-y)^2} = O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |R_{3,k}^{(m,n)}| &= \left| \frac{\delta_k}{3(n+1)^2} \sum_{\ell=1}^{m-1} \frac{a_{n+1+\ell}}{a_{n+1}} \left\{ \sin[\ell \theta_k + (n+1+\ell)\eta_{k,\ell}] (n+1+\ell)^3 + \sin[\ell \theta_k - (n+1-\ell)\eta_{k,\ell}] (n+1-\ell)^3 \right\} \right| \\ &= \frac{2}{3(n+1)^3} \frac{y - y^m}{1-y} \sum_{\ell=1}^{m-1} y^\ell [(n+1+\ell)^3 + (n+1-\ell)^3] = \frac{4}{3} \left(\frac{y - y^m}{1-y} \right)^2 + \frac{4}{(n+1)^2} \frac{y - y^m}{1-y} \sum_{\ell=1}^{m-1} \ell y^\ell \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{y - y^m}{1-y} \right)^2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |R_{4,k}^{(m,n)}| &= \left| \frac{4}{(n+1)\delta_k} \sum_{j=m}^{2n+1} \frac{a_{n+1+j}}{a_{n+1}} \sin j \theta_k \right| = 2 \left| \frac{\sum_{j=m}^{2n+1} a_{n+1+j} \sin j \theta_k}{\sum_{\ell=1}^{m-1} a_{n+1+\ell} \sin \ell \theta_k} \right| \\ &\leq \frac{2}{\beta} \sum_{j=m}^{2n+1} j y^j = \frac{2y}{\beta} \frac{d}{dy} \left(\frac{y^m - y^{2n+2}}{1-y} \right) = \frac{2y}{\beta} \frac{my^{m-1} - (m-1)y^m - (2n+2)y^{2n+1} + (2n+1)y^{2n+2}}{(1-y)^2} \end{aligned}$$

$$|R_{5,k}^{(m,n)}| = \frac{4}{n+1} \left| \sum_{j=n_1}^{2n+1} \frac{a_{n+1+j}}{a_{n+1}} j \cos j \theta_k \right| = \frac{4y}{n+1} \frac{d}{dy} \left(\frac{y^m - y^{2n+2}}{1-y} \right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} |R_{6,k}^{(m,n)}| &= \left| \frac{\delta_k}{3(n+1)^2} \sum_{j=m}^{2n+1} \frac{a_{n+1+j}}{a_{n+1}} \left\{ \sin[j \theta_k + (n+1+j)\eta_{k,j}] (n+1+j)^3 + \sin[j \theta_k - (n+1-j)\eta_{k,j}] (n+1-j)^3 \right\} \right| \\ &\leq \frac{2}{3} \frac{y - y^m}{1-y} \sum_{j=m}^{2n+1} \left[2y^j + \frac{6j^2 y^j}{(n+1)^2} \right] = \frac{4}{3} \frac{(y - y^m)(y^m - y^{2n+2})}{(1-y)^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |R_{7,k}^{(m,n)}| &= \left| \sum_{r=1}^{\infty} (2r+1)^2 \frac{a_{(2r+1)(n+1)}}{a_{n+1}} \cos[(2r+1)(n+1) \eta_{k,r,0}] \right| \\
 &\leq \sum_{r=1}^{\infty} (2r+1)(2r+2) y^{2r(n+1)} = \frac{d^2}{d\eta^2} \left(\frac{\eta^4}{1-\eta^2} \right) \Big|_{\eta=y^{n+1}} \\
 &= \frac{12\eta^2 - 18\eta^4 + 40\eta^6 - 2\eta^8}{(1-\eta^2)^4} \Big|_{\eta=y^{n+1}} = O(y^{2n+2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |R_{8,k}^{(m,n)}| &= \left| \frac{2}{(n+1)\delta_k} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{a_{(2r+1)(n+1)+j}}{a_{n+1}} (2r+2) \sin j\theta_k \right| \\
 &\leq \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2n+1} a_{(2r+1)(n+1)+j} (2r+2) U_{j-1}(\cos \theta_k)}{\sum_{\ell=1}^m a_{n+1+\ell} U_{\ell-1}(\cos \theta_k)} \leq \frac{1}{\beta} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2n+1} y^{2r(n+1)+j} \cdot j(2r+2) \\
 &= \frac{y}{\beta} \frac{d}{dy} \left(\frac{y}{1-y} \right) \left[\frac{y^{2n+2}}{1-y^{2n+2}} + \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\eta^3}{1-\eta^2} \right) \Big|_{\eta=y^{n+1}} \right] = \frac{1}{\beta} O(y^{2n+2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |R_{9,k}^{(m,n)}| &= \frac{1}{(n+1)^2} \left| \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{a_{(2r+1)(n+1)+j}}{a_{n+1}} \left\{ [(2r+1)(n+1)+j]^2 \cos[(2r+1)(n+1)+j](\theta_k + \eta_{k,r,j}) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. -(n+1-j)^2 \cos[(n+1-j)(\theta_k + \eta_{k,r,j})] \right\} \right| \\
 &\leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2n+1} y^{2r(n+1)+j} \left\{ (2r+3)^2 (n+1)^2 + (n+1)^2 \right\} \\
 &= \frac{y-y^{2n+2}}{1-y} 2 \sum_{r=1}^{\infty} (2r+1)(2r+2) y^{2r(n+1)} = O(y^{2n+2})
 \end{aligned}$$

Fassen wir diese Abschätzungen zusammen, so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^9 |R_{i,k}| \leq \varphi(\gamma, \beta, m) + O\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{\beta} O\left(\gamma^{2n+2}\right)$$

mit

$$\varphi(\gamma, \beta, m) = \underbrace{\frac{4}{3} \left(\frac{\gamma - \gamma^m}{1 - \gamma} \right)^2}_{(3)} + \underbrace{\frac{2\gamma}{\beta} \frac{m\gamma^{m-1} - (m-1)\gamma^m}{(1-\gamma)^2}}_{(4)} + \underbrace{\frac{4}{3} \frac{(\gamma - \gamma^m)\gamma^m}{(1-\gamma)^2}}_{(6)}$$

Wenn wir nun Werte von γ und β (bei gegebenem m) finden, für die $\varphi(\gamma, \beta, m) < 1$ ist, so gilt (3) für hinreichend großes n , wenn f die Bedingungen (4) und (5) mit diesen β und γ erfüllt. Es gilt z.B.

$$\varphi(0,175 ; 0,175 ; 2) \approx 0,988$$

$$\varphi(0,23 ; 0,1242 ; 3) \approx 0,952$$

$$\varphi(0,26 ; 0,072072 ; 4) \approx 0,907$$

Die Werte von β ergeben sich unter der Voraussetzung

$$\left| \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right| = \gamma, \text{ wenn wir gemäß (6) abschätzen.}$$

Im Fall $m = 2n+2$, der allerdings nur von geringem praktischen Interesse ist, gilt

$$R_{4,k}^{(m,n)} = R_{5,k}^{(m,n)} = R_{6,k}^{(m,n)} = 0, \quad ,$$

und wenn wir (4) und

$$(\beta^{(m,n)})^{-1} = o(\gamma^{-2n-2})$$

voraussetzen, erhalten wir

$$|R_{8,k}^{(m,n)}| = o(1)$$

sowie

$$\sum_{i=1}^g R_{i,k}^{(m,n)} \leq \frac{4}{3} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^2 + o(1) \quad ,$$

$$\text{wobei} \quad \frac{4}{3} \left(\frac{0,464}{1-0,464} \right)^2 < 1 \quad \text{gilt.}$$

Im Falle der trigonometrischen Approximation könnte man analog zu (7) zeigen

$$g(\theta_k, g) - \sigma_n(\theta_k, g) = (-1)^k \left[\sum_{r=0}^{\infty} a_{(2r+1)(n+1)} + a_{n+1} \frac{(n+1)^2 \delta_k^2}{2} R_k^{(m,n)} \right]$$

wobei man zum Beweis von $R_k^{(m,n)} > 0$ z.B. die Ausdrücke

$$\frac{1}{3} \left| \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}^2} + \frac{b_{n+1} \sum_{j=1}^{m-1} (-2 \sin(j\theta_k) a_{n+1+j} + 2b_{n+1+j} \cos j\theta_k)}{a_{n+1}^2} \right|$$

$$2 \left| \frac{\sum_{j=m}^{2n+1} b_{n+1+j} \cos j\theta_k}{\frac{b_{n+1}}{2} + \sum_{v=1}^{m-1} (-a_{n+1+v} \sin(v\theta_k) + b_{n+1+v} \cos v\theta_k)} \right|$$

abzuschätzen hat; den Bedingungen (4) und (5) entsprechende Bedingungen an die Fourierkoeffizienten von g dafür, daß die obigen Ausdrücke hinreichend klein werden, sind ziemlich unübersichtlich bzw. willkürlich.

c) Verbesserte untere Schranken

Durch ein lineares Funktional L auf $C[-1,1]$ mit

$$L(f) = \sum_{\mu=0}^{n+1} f(z_{\mu}) \alpha_{\mu} ,$$

wobei $-1 \leq z_0 < z_1 < \dots < z_{n+1} \leq 1$ sowie

$$\omega(x) = \prod_{\mu=0}^{n+1} (x - z_{\mu})$$

$$(8) \quad \alpha_{\mu} = \frac{1}{\omega'(z_{\mu}) \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{(-1)^{\nu}}{\omega'(z_{\nu})}} .$$

gilt, wird bekanntlich (s. z.B. Meinardus [67], S.75) eine untere Schranke für die Minimalabweichung $E_n(f)$ geliefert. Dabei ergibt sich für

$$z_{\mu} = \xi_{\mu} \quad (\mu = 0, 1, \dots, n+1)$$

das lineare Funktional $L_{n,0}$ mit

$$L_{n,0}(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{\mu=0}^{n+1} (-1)^{n+1-\mu} f(\xi_{\mu})$$

(wobei die zwei Striche am Summenzeichen bedeuten, daß die Summanden mit $\mu = 0$ und $\mu = n+1$ zuvor zu halbieren sind)

bzw. bei gegebenem f mit $a_{n+1} \neq 0$ für

$$z_{\mu} = \xi_{\mu,f} \quad (\mu = 0, 1, \dots, n+1)$$

das lineare Funktional $L_{n,f}$ mit

$$L_{n,f}(g) = \sum_{\mu=0}^{n+1} a_{\mu,f} g(\xi_{\mu,f}) \quad .$$

Wir wollen nun zeigen, daß unter gewissen Voraussetzungen gilt

$$|L_{n,f}(f)| > |L_{n,0}(f)| \quad ,$$

d.h. daß wie beim Remez - Verfahren beim Übergang von den ξ_{μ} zu den $\xi_{\mu,f}$ ein "Aufstieg" stattfindet.

Wir haben

$$\begin{aligned} \xi_{n+1-k,f} = \cos \theta_k + 2 \sin^2 \theta_k \frac{\sum_{\ell=1}^{m-1} a_{n+1+\ell} U_{\ell-1}(\cos \theta_k)}{(n+1) a_{n+1}} \\ + \frac{\delta_k^2}{2} \cos(\theta_k + \tilde{\eta}_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \xi_{n+1-k} + 2(1-\xi_{n+1-k}^2) \sum_{\ell=1}^{m-1} \frac{a_{n+1+\ell}}{(n+1)a_{n+1}} U_{\ell-1}(\xi_{n+1-k}) + \\
 &+ \cos(\theta_k + \tilde{\eta}_k) \frac{(1-\xi_{n+1-k}^2)}{(n+1)^2} \left[\sum_{\ell=1}^{m-1} \frac{a_{n+1+\ell}}{a_{n+1}} U_{\ell-1}(\xi_{n+1-k}) \right]^2 = \\
 &= x_{n+1-k, f} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
 \end{aligned}$$

$$(k = 1, \dots, n)$$

mit gewissen $\tilde{\eta}_k$ zwischen 0 und δ_k , wenn wir wieder (4) voraussetzen.

Um die $\alpha_{\mu, f}$ zu bestimmen, berechnen wir zunächst

$$\tilde{\alpha}_{\mu, f} := \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq \mu}}^{n+1} (\xi_{\mu, f} - \xi_{k, f}) =$$

$$= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq \mu}}^{n+1} (\xi_{\mu} - \xi_k).$$

$$\left[1 + \frac{2 \left[(1-\xi_{\mu}^2) \sum_{\ell=1}^{m-1} a_{n+1+\ell} U_{\ell-1}(\xi_{\mu}) - (1-\xi_k^2) \sum_{\ell=1}^{m-1} a_{n+1+\ell} U_{\ell-1}(\xi_k) \right]}{(\xi_{\mu} - \xi_k) (n+1) a_{n+1}} \right] + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Bigg\}$$

Für $\ell \geq 2$ schätzen wir nun ab:

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & \left| \frac{(1-\xi_{n+1-j}^2)U_{\ell-1}(\xi_{n+1-j}) - (1-\xi_{n+1-k}^2)U_{\ell-1}(\xi_{n+1-k})}{\xi_{n+1-j} - \xi_{n+1-k}} \right| = \\
 & = \left| \frac{d}{dx} [(1-x^2)U_{\ell-1}(x)] \right|_{\zeta_{k,j}} = \\
 & = \left| \left[\sin \varphi \ell \cos(\ell \varphi) + \cos \varphi U_{\ell-1}(\cos \varphi) \sin \varphi \right] \right|_{\varphi=\arccos(\zeta_{k,j})} \left| \frac{1}{\sqrt{1-\zeta_{k,j}^2}} \right|
 \end{aligned}$$

$$\leq 2\ell \quad ;$$

dabei liegt $\zeta_{k,j}$ zwischen ξ_{n+1-j} und ξ_{n+1-k} .

Daraus ergibt sich unter der Voraussetzung (4)

$$\begin{aligned}
 & \left| -\frac{2a_{n+2}}{a_{n+1}} (\xi_{\mu} + \xi_k) + 2 \sum_{\ell=2}^{m-1} \frac{a_{n+1+\ell}}{a_{n+1}} \frac{(1-\xi_{\mu}^2)U_{\ell-1}(\xi_{\mu}) - (1-\xi_k^2)U_{\ell-1}(\xi_k)}{\xi_{\mu} - \xi_k} \right| \\
 & \leq 4\gamma + 2 \sum_{\ell=2}^{m-1} \gamma^{\ell} \cdot 2\ell = 4\gamma \left[1 + \frac{d}{d\gamma} \left(\frac{\gamma^2 - \gamma^m}{1-\gamma} \right) \right] =: G(\gamma)
 \end{aligned}$$

und damit wegen $e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

$$e^{-G(\gamma)} - O\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{|\tilde{\alpha}_{\mu, \ell}|}{\left| \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq \mu}}^{n+1} (\xi_{\mu} - \xi_k) \right|} \leq e^{G(\gamma)} + O\left(\frac{1}{n}\right) .$$

Weiterhin erhalten wir

$$e^{-G(\gamma)} - O\left(\frac{1}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n+1} |\alpha_{k,f}^{-1}| \leq e^{G(\gamma)} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

also schließlich

$$e^{-2G(\gamma)} - O\left(\frac{1}{n}\right) \leq (n+1) |\alpha_{\mu,f}| \leq e^{2G(\gamma)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\mu=1, \dots, n)$$

$$e^{-2G(\gamma)} - O\left(\frac{1}{n}\right) \leq |\alpha_{\mu,f}| (2n+2) \leq e^{2G(\gamma)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \mu \in \{0; n+1\}.$$

Jetzt können wir $L_{n,f}(f)$ unter den Voraussetzungen (4), (5) und $\varphi(\gamma, \beta, m) < 1$ für hinreichend großes n nach unten abschätzen:

$$\begin{aligned} |L_{n,f}(f)| &= \left| \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_{k,f} (f(\xi_{k,f}) - p_{n,f}(\xi_{k,f})) \right| \\ &\geq \left| \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \alpha_{k,f} \left[\sum_{r=0}^{\infty} a_{(2r+1)(n+1)} + \frac{2 \left(\sum_{\ell=2}^{m-1} a_{n+1+\ell} \sin[\ell \theta_{n+1-k}] \right)^2}{a_{n+1}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(1 - \varphi(\gamma, \beta, m) - O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right] \right| \end{aligned}$$

$$\geq |L_{n,0}(f)| + 2|a_{n+1}| \left(1 - \varphi(\gamma, \beta, m) - O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \sum_{k=0}^{n+1} |\alpha_{k,f}| \beta^2 \sin^2 \theta_{n+1-k}$$

$$\geq |L_{n,0}(f)| \left[1 + \left(1 - O(\gamma^{2n+2}) \right) 2\beta^2 \left(e^{-2G(\gamma)} - O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left(1 - \varphi(\gamma, \beta, m) - O\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\frac{\pi}{2}} \right]$$

$$= |L_{n,0}(f)| \left[1 + \pi \beta^2 e^{-2G(\gamma)} (1 - \varphi(\gamma, \beta, m)) \left(1 - O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right]$$

Im Fall $m = 1$ kann man unter Voraussetzung von (4) einen asymptotischen Ausdruck für $L_{n,f}(f)$ angeben. Zunächst haben wir mit der Bezeichnung

$$\rho_n = \frac{2a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

$$\tilde{\alpha}_{\mu, f} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq \mu}}^{n+1} (\xi_{\mu} - \xi_k) \left[1 - \frac{g_n}{n+1} (\xi_{\mu} + \xi_k) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq \mu}}^{n+1} (\xi_{\mu} - \xi_k) \frac{\prod_{\ell=0}^{n+1} \left(1 - \frac{g_n \xi_{\mu}}{n+1} - \frac{g_n}{n+1} \cos \frac{\ell \pi}{n+1} \right)}{\left(1 - \frac{2 \xi_{\mu} g_n}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

$$= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq \mu}}^{n+1} (\xi_{\mu} - \xi_k) \frac{\left(\frac{g_n}{n+1} \right)^{n+2} u_n \left(\left[1 - \frac{g_n \xi_{\mu}}{n+1} \right] : \frac{g_n}{n+1} \right) 2^{-n}}{\left(1 - \frac{2 \xi_{\mu} g_n}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)} \left(1 - \left(\frac{1 - \frac{g_n \xi_{\mu}}{n+1}}{\frac{g_n}{n+1}} \right)^2 \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

$$= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq \mu}}^{n+1} (\xi_{\mu} - \xi_k) \frac{1}{2^{n+1}} \left\{ \left[1 - \frac{g_n \xi_{\mu}}{n+1} + \sqrt{1 - \frac{2 g_n \xi_{\mu}}{n+1} + \frac{g_n^2 \xi_{\mu}^2}{(n+1)^2} - \frac{g_n^2}{(n+1)^2}} \right]^{n+1} \right.$$

$$\left. - \left[1 - \frac{g_n \xi_{\mu}}{n+1} - \sqrt{1 - \frac{2 g_n \xi_{\mu}}{n+1} + \frac{g_n^2 \xi_{\mu}^2}{(n+1)^2} - \frac{g_n^2}{(n+1)^2}} \right]^{n+1} \right\}$$

$$\left(1 - \frac{g_n^2}{(n+1)^2} - \frac{2 g_n \xi_{\mu}}{n+1} + \frac{g_n^2 \xi_{\mu}^2}{(n+1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)}{\left(1 - \frac{2 g_n \xi_{\mu}}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)}$$

$$= \prod_{k=0}^{n+1} (\xi_{\mu} - \xi_k) \frac{1}{2^{n+1}} \left\{ \left[1 - \frac{g_n \xi_{\mu}}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]^{n+1} 2^{n+1} - O\left(\frac{1}{n^2}\right)^{n+1} \right\} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \prod_{k=0}^{n+1} (\xi_{\mu} - \xi_k) e^{-g_n \xi_{\mu}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^{n+1} |\tilde{\alpha}_{\mu, f}|^{-1} &= \sum_{\mu=0}^{n+1} \frac{e^{\rho_n \xi} \mu \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{(n+1)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\rho_n \cos \varphi} d\varphi \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= I_0(\rho_n) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

wobei I_0 die Besselfunktion null -ter Ordnung mit imaginärem Argument bedeutet, d.h.

$$I_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}$$

Ferner erhalten wir für $m = 2$

$$\xi_{n+1-k, f} = \cos\left(\theta_k - \rho_n \frac{\sin \theta_k}{n+1}\right) \quad (k = 1, \dots, n)$$

und speziell für $j = 1, 2, \dots, [1 + \kappa \log n]$ mit $\kappa = \frac{-1}{\log \gamma}$:

$$\begin{aligned} &\cos[(n+1+j)(\theta_k + \delta_k)] - \cos[(n+1-j)(\theta_k + \delta_k)] \\ &= -2(-1)^k \sin j\theta_k \sin[(n+1)\delta_k] \left[1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right)\right] \end{aligned}$$

Unter Benutzung der Gleichungen

$$\int_0^{\pi} e^{-p \cos x} \cos(p \sin x) dx = \pi$$

$$\int_0^{\pi} e^{p \cos x} \sin(p \sin x) \sin jx dx = \frac{\pi}{2} \frac{p^j}{j!}$$

(s. z.B. Gradshteyn - Ryzhik [65], Nr.3.931 und 3.932)
und der Abschätzung

$$\sum_{k=\lceil \kappa \log n+2 \rceil}^{\infty} \gamma^k \leq \frac{\gamma^{\kappa \cdot \log n}}{1-\gamma} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} L_{n,f}(f) &= \sum_{\mu=0}^{n+1} a_{\mu,f} (f(\xi_{\mu,f}) - p_{n,f}(\xi_{\mu,f})) = \\ &= \frac{1}{I_O(\rho_n) \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{e^{\rho_n \cos \theta_{n+1-k}} (-1)^{n+1-k}}{(n+1)} \\ &\quad \left\{ a_{n+1} (-1)^{n+1-k} \cos[(n+1) \delta_{n+1-k}] - \right. \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^{\lceil \frac{1+\kappa \log n}{j} \rceil} a_{n+1+j} \left[(-1)^{n+1-k} \sin(j \theta_{n+1-k}) \sin((n+1) \delta_{n+1-k}) \right. \\ &\quad \left. \left. \left(1+O\left(\frac{\log n}{n}\right)\right) \right] + a_{n+1} \cdot o\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1+O\left(\frac{1}{n}\right)}{\pi I_0(\rho_n)} \left[\int_0^\pi e^{-\rho_n \cos \varphi} a_{n+1} \cos(-\rho_n \sin \varphi) d\varphi \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \right. \\
 &- 2 \sum_{j=1}^{\lfloor 1+\kappa \log n \rfloor} a_{n+1+j} \int_0^\pi e^{-\rho_n \cos \varphi} \sin j\varphi \sin(-\rho_n \sin \varphi) d\varphi \cdot \\
 &\cdot \left. \left(1+O\left(\frac{\log n}{n}\right)\right) + a_{n+1} O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\
 &= \frac{a_{n+1} - \sum_{j=1}^{\lfloor 1+\kappa \log n \rfloor} a_{n+1+j} \frac{(-\rho_n)^j}{j!}}{I_0(\rho_n)} \left(1+O\left(\frac{\log n}{n}\right)\right)
 \end{aligned}$$

(Im Falle der trigonometrischen Approximation erhalte man analog einen viel komplizierteren asymptotischen Ausdruck.)

Damit können wir $|L_{n,f}(f)|$ nach unten abschätzen

$$|L_{n,f}(f)| \geq |a_{n+1}| \left(1 - O\left(\frac{\log n}{n}\right)\right) \frac{1 + \frac{\rho_n^2}{2} - e^{-\gamma|\rho_n|} + 1 + \gamma|\rho_n|}{I_0(|\rho_n|)}$$

Ist insbesondere $\gamma \leq 0,59 =: \gamma_0$ und $|\rho_n| = 2\gamma$, so ist

$$|L_{n,f}(f)| > |L_{n,0}(f)| \quad \text{für hinreichend großes } n ;$$

denn es gilt

$$\frac{2 + 4\gamma_0^2 - e^{2\gamma_0^2}}{I_0(2\gamma_0)} \geq 1,00485$$

d.h.

$$1 > \frac{1}{\gamma_0^2} \left(I_0(2\gamma_0) + e^{2\gamma_0^2} - 2 - 3\gamma_0^2 \right) ,$$

und

$$\frac{1}{\gamma^2} \left(I_0(2\gamma) + e^{2\gamma^2} - 2 - 3\gamma^2 \right)$$

ist für $\gamma > 0$ eine monoton wachsende Funktion von γ .

§ 2 Fehlerabschätzungen beim Verfahren von Darlington

a) Beschreibung des Verfahrens

S. Darlington [70] beschrieb ein Verfahren zur annähernten Bestimmung der besten Tschebyscheff-Approximation durch Polynome vom Grad $\leq n$, das numerisch folgendermaßen abläuft:

Man berechnet die ersten $n+m+1$ Koeffizienten der Entwicklung einer gegebenen Funktion f nach Tschebyscheff-Polynomen (etwa mit Hilfe der Fast Fourier Transform), bestimmt den betragsmaximalen Eigenwert einer $m \times m$ -Matrix und den zugehörigen Eigenvektor, wendet schließlich den üblichen Divisionsalgorithmus für Polynome an und erhält damit die Koeffizienten des Näherungspolynoms.

Das Ziel der Ausführungen in diesem Kapitel ist es, die Norm der bei diesem Verfahren entstehenden Fehlerfunktion mit der Minimalabweichung $E_n(f)$ zu vergleichen.

Wir gehen dazu aus von einer auf $[-1,1]$ definierten Funktion f mit einer gleichmäßig konvergenten Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k$$

Das Vorgehen von Darlington besteht nun darin, ein Polynom

$$P_{n,m} := \sum_{k=0}^n a_k T_k$$

so zu bestimmen, daß für ein $m \geq 2$

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} c_k T_k - P_{n,m}$$

mindestens $n+2$ mal angenähert alterniert.

Wir setzen also an

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_{k=n+1}^{n+m} c_k T_k(x) - \sum_{j=0}^n a_j T_j(x) = \\ & = \epsilon \cos \left[(n+m) \arccos x - \sum_{\ell=1}^{m-1} \delta_{\ell}(x) \right] + \eta(x) \quad , \end{aligned}$$

wobei

$$\delta_j(x) = \arccos \left(\frac{\mu_j x - 1}{\mu_j - x} \right) \quad \text{mit } |\mu_j| \geq 1 \quad (j=1, 2, \dots, m-1)$$

und η eine Funktion ist, deren Norm sich als klein gegenüber $|\epsilon|$ erweisen wird; die Funktion

$$\cos \left[(n+m) \arccos x - \sum_{j=1}^{m-1} \delta_j(x) \right]$$

alterniert mindestens $n+2$ mal im Intervall $[-1, 1]$.

Entsprechende Ansätze wurden gemacht von Clenshaw [64] sowie Binh Lam und Elliott [72] bei ihrem Bemühen, $E_n(f)$ mit dem Fehler zu vergleichen, der beim Abbrechen der Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen entsteht.

Mit den Bezeichnungen $x = \cos \varphi$ und

$$\alpha_j = \mu_j - \sqrt{\mu_j^2 - 1} \operatorname{sgn} \mu_j$$

haben wir für $\cos \varphi \neq \mu_j$

$$e^{-i\delta_j(x)} = \frac{\mu_j \cos \varphi - 1 - i \sin \varphi \operatorname{sgn}(\mu_j) \sqrt{\mu_j^2 - 1}}{\mu_j - \cos \varphi} = \frac{\alpha_j e^{i\varphi} - 1}{\alpha_j - e^{i\varphi}},$$

sodaß die Gleichung (1) sicher gilt, wenn

$$\begin{aligned} (2) \quad & \sum_{k=n+1}^{n+m} c_k e^{ik\varphi} - \sum_{j=0}^n a_j e^{ij\varphi} = \\ & = \varepsilon e^{i(n+m)\varphi} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{\alpha_j e^{i\varphi} - 1}{\alpha_j - e^{i\varphi}} + H(e^{i\varphi}) \end{aligned}$$

gilt, wobei

$$\operatorname{Re}[H(e^{i\varphi})] = \eta(\cos \varphi)$$

ist.

Die Gültigkeit von (2) für alle φ ist (im Falle $|\alpha_j| < 1$) äquivalent zu der Gleichung

$$(3) \quad \sum_{k=n+1}^{n+m} c_k z^k = \epsilon z^{n+m} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{1-\alpha_j z}{z-\alpha_j} + H(z) + \sum_{\ell=0}^n a_\ell z^\ell$$

für alle z außer den α_j .

Einen entsprechenden Ansatz kann man auch verwenden zur angenäherten Bestimmung der besten gleichmäßigen Approximation durch Polynome vom Grad $\leq n$ auf dem Einheitskreis S^1 in der komplexen Ebene an die Funktion

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} c_k z^k, \quad ,$$

wobei die c_k jetzt komplex sein dürfen:

$$(3a) \quad \sum_{k=n+1}^{n+m} c_k z^k = \epsilon z^{n+m} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{1-\bar{\alpha}_j z}{z-\alpha_j} + H(z) + \sum_{\ell=0}^n a_\ell z^\ell$$

Wie man sieht, muß, um (3a) zu erfüllen, H als rationale Funktion in z mit dem Nenner

$$\prod_{j=1}^{m-1} (z - \alpha_j)$$

gewählt werden, und dann ist nach einem Satz von Klotz [74], S.38,

$$\sum_{\ell=0}^n a_{\ell} z^{\ell}$$

ein Polynom bester Approximation an

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} c_k z^k - H(z)$$

auf S^1 .

Da die Funktion

$$E(\varphi) := (e^{i\varphi})^{n+m} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{1 - \bar{\alpha}_j e^{i\varphi}}{e^{i\varphi - \alpha_j}}$$

den Einheitskreis mindestens $n+1$ mal im positiven Sinn durchläuft, wenn φ von 0 bis 2π wächst, nimmt $\operatorname{Re}[E(\varphi)]$ den Betrag 1 mindestens $2n+2$ mal mit abwechselndem Vorzeichen an, sodaß man auch ein Verfahren zur angenäherten Bestimmung eines trigonometrischen Polynoms bester Approximation vom Grad $\leq n$ an ein trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n+m$ erhält, indem man in (3a) zum Realteil übergeht:

$$(1a) \quad \sum_{k=n+1}^{n+m} (\operatorname{Re}[c_k] \cos k\varphi - \operatorname{Im}[c_k] \sin k\varphi) -$$

$$- \operatorname{Re}[a_0] - \sum_{j=1}^n (\operatorname{Re}[a_j] \cos j\varphi - \operatorname{Im}[a_j] \sin j\varphi) =$$

$$= \epsilon \operatorname{Re}[E(\varphi)] + \operatorname{Re}[H(e^{i\varphi})] \quad .$$

Wir wenden uns nun der Berechnung von $a_0, \dots, a_n$ und ϵ aus den gegebenen $c_{n+1}, \dots, c_{n+m}$ zu und setzen zu diesem Zweck

$$(4a) \quad \prod_{j=1}^{m-1} (z - \alpha_j) =: Q(z) = \sum_{k=0}^{m-1} q_k z^k$$

$$(4b) \quad H(z) + \sum_{\ell=0}^n a_\ell z^\ell =: z^{n+1} \frac{\sum_{k=0}^{m-2} v_k z^k}{Q(z)}$$

$$(4c) \quad H(z) =: \frac{\sum_{\ell=0}^{m-2} \rho_\ell z^\ell}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j z^{-j} \quad .$$

(3a) ist dann äquivalent zu der Gleichung

$$(5) \quad \sum_{k=n+1}^{n+m} c_k z^k \sum_{\ell=0}^{m-1} q_\ell z^\ell =$$

$$= \epsilon z^{n+2m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \bar{q}_j z^{-j} + z^{n+1} \sum_{k=0}^{m-2} v_k z^k$$

Daraus ergibt sich durch Koeffizientenvergleich bei z^{n+m+k} ($k = 0, 1, \dots, m-1$)

$$(6a) \quad \sum_{\ell=k}^{m-1} q_{m-1+k-\ell} c_{n+1+\ell} = \epsilon \bar{q}_{m-1-k}$$

und bei z^{n+1+j} ($j = 0, 1, \dots, m-2$)

$$(6b) \quad \sum_{l=0}^j q_{j-l} c_{n+1+l} = v_j$$

Zur Berechnung von $a_0, \dots, a_n$ und $p_0, \dots, p_{m-2}$ ergibt sich durch Koeffizientenvergleich wie üblich das folgende lineare Gleichungssystem, wobei wir $q_{m-1} = 1$ voraussetzen, was, wie wir noch sehen werden, in den von uns betrachteten Fällen möglich ist:

(7)

$$v_l = a_n q_{l+1} + \dots + a_{n+l-m+3} q_{m-2} + a_{n+l-m+2}$$

Koeffizienten-
vergleich bei

$$z^{n+1+l} \quad (l=0, 1, \dots, m-2)$$

$$0 = a_\mu q_0 + \dots + a_{\mu-m+2} q_{m-2} + a_{\mu-m+1}$$

$$z^\mu \quad (\mu=m-1, m, \dots, n)$$

$$0 = p_\lambda + a_0 q_\lambda + a_1 q_{\lambda-1} + \dots + a_\lambda q_0$$

$$z^\lambda \quad (\lambda=0, 1, \dots, m-2)$$

Man könnte versuchen, aus H noch einen polynomialen Anteil abzuspalten, etwa indem man eine Partialbruchzerlegung vornimmt und dann die Polynome bester Approximation an die einzelnen Partialbrüche zu

$$\sum_{k=0}^n a_k T_k$$

addiert (bei der Polynomapproximation); diese sind ja im Fall einfacher Nullstellen explizit bekannt (s. z.B. Meinardus [67], S.33), und im Fall mehrfacher Nullstellen kennt man einfach zu berechnende Näherungen (s. z.B. S.N. Bernstein [26], S.121, S.136). Die Abschätzung der Fehlerfunktion macht jedoch schon im Fall einer einfachen Nullstelle α_ℓ Schwierigkeiten, da man zur Abschätzung des zugehörigen Partialbruchs

$$\frac{\sum_{j=0}^{m-2} \rho_j \alpha_\ell^j}{Q'(\alpha_\ell)} \cdot \frac{1}{z - \alpha_\ell}$$

eine untere Schranke für die Diskriminante von Q brauchte.

Aus (6a) ergibt sich die folgende Eigenwertaufgabe zur Bestimmung von ϵ und $q_0, \dots, q_{m-1}$, die man in etwas anderer Form schon bei Achieser [31], [67] S.291 in seiner Untersuchung des Caratheodory - Fejérschen Koeffizientenproblems findet: Mit den Bezeichnungen

$$C := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{c}_{n+m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{0}{\bar{c}_{n+m}} & \dots & \bar{c}_{n+2} & \bar{c}_{n+1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{n+m} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{n+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & c_{n+2} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n+m} & \dots & c_{n+2} & c_{n+1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{q} := \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{m-1} \end{pmatrix}$$

gilt

$$(8) \quad (C - \epsilon I) \underline{q} = 0 \quad .$$

Die für unsere Diskussion wichtigen Ergebnisse von Achieser fassen wir zusammen in dem folgenden

Satz:

Zu jedem λ mit

$$\det (C - \lambda I) = 0$$

existiert eine Lösung $\underline{v} = (v_0, \dots, v_{2m-1})^t$ der Eigenwertaufgabe

$$(C - \lambda I) \underline{v} = 0 \quad ,$$

für die $v_k = \overline{v}_{k+m} \quad (k = 0, 1, \dots, m-1)$ gilt.

Mit λ ist auch $-\lambda$ Eigenwert von C , und ist ϵ der maximale Eigenwert von C , so liegen alle Nullstellen des zugehörigen Polynoms Q innerhalb des Einheitskreises oder auf seinem Rande. Wenn die Vielfachheit des maximalen Eigenwerts gleich μ^* ist, dann kann man

$$\frac{\sum_{j=0}^{m-1} \overline{q}_{m-1-j} z^j}{Q(z)}$$

so kürzen, daß in Zähler und Nenner ein Polynom vom (genauen) Grad $m - \mu^*$ steht.

Wir werden also im folgenden als ϵ stets den maximalen Eigenwert von C wählen. Liegt eine Nullstelle α^* auf dem Rand des Einheitskreises, so gilt

$$\frac{\sum_{j=0}^{m-1} \bar{q}_{m-1-j} z^j}{Q(z)} = \frac{1 - (\alpha^*)^{-1} z}{z - \alpha^*} \prod_{\alpha_j \neq \alpha^*} \frac{1 - \bar{\alpha}_j z}{z - \alpha_j} =$$

$$= -\alpha^* \prod_{\alpha_j \neq \alpha^*} \frac{1 - \bar{\alpha}_j z}{z - \alpha_j},$$

d.h. man kann den Faktor $z - \alpha^*$ "herauskürzen".

Ist also $m-1 > \mu^*$, so existiert ein nicht konstantes Polynom Q , dessen sämtliche Nullstellen im Innern des Einheitskreises liegen und das (mit den zugehörigen v_k) die Gleichung (5) erfüllt, wenn man gegebenenfalls m durch $m+1-\mu^*$ ersetzt. Berechnet man ϵ und $q_0, \dots, q_{m-1}$ aus (8) mit Hilfe der Potenzmethode, so liegt der Fall der Unkürzbarkeit bekanntlich genau dann vor, wenn die Iteration zur Berechnung von ϵ und $q_0, \dots, q_{m-1}$ konvergiert und bei Beschränkung auf die zu dem Eigenvektor zu ϵ orthogonalen Vektoren des Raumes $\mathbb{C}^{2m}$ sich stets ein Rayleigh - Quotient ergibt, der betragsmäßig kleiner als eine unterhalb ϵ gelegene Schranke ist.

Sind $c_{n+1}, \dots, c_{n+m}$ reell, so ist ϵ und damit auch $q_0, \dots, q_{m-1}$ reell, sodaß sich die Gleichung (8) auf die folgende reduziert:

$$(8a) \quad \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & \dots & 0 & c_{n+m} \\ 0 & -\varepsilon & \dots & c_{n+m} & c_{n+m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\varepsilon & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n+m} & \dots & c_{n+3} & c_{n+2} \\ c_{n+m} & c_{n+m-1} & \dots & c_{n+3} & c_{n+2} & c_{n+1} - \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ q_{m-1} \end{pmatrix} = 0$$

Sind speziell alle Koeffizienten $c_{n+1}, \dots, c_{n+m}$ nicht-negativ und $c_{n+1+2j} > 0$ für ein

$$j \in \left\{ 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \right\} ,$$

so ist der betragsmaximale Eigenwert ε einfach (s. z.B. Varga [62], S.38).

b) Vergleich mit der Minimalabweichung bei Approximation
von Polynomen höheren Grades (monoton fallende Koeffizienten)

Um zu zeigen, daß das beschriebene Verfahren eine gute Annäherung an die gegebene Funktion im Sinne der Tschebyscheff - Norm liefert, beweisen wir, daß

$$||H||_S := \max_{z \in S^1} |H(z)|$$

größenordnungsmäßig kleiner als der Eigenwert ϵ ist.
Die Laurent - Entwicklung (4c) von H ist konvergent außerhalb des Kreises um 0 mit dem Radius

$$\tau := \sup_{j=1, \dots, m-1} |\alpha_j| ,$$

und daher wird es zur Gewinnung einer Abschätzung von

$$\frac{||H||_S}{\epsilon}$$

wichtig sein, für τ eine von n und m unabhängige Schranke zu gewinnen, die kleiner als 1 ist.

In diesem Zusammenhang bringen wir zunächst ein Lemma, dessen Beweisidee sich schon bei Fejér [27] findet.

Lemma 1:

Gilt mit einem positiven $\gamma < 1$

$$(9) \quad 0 < c_{n+m} \leq \gamma c_{n+m-1} \leq \gamma^2 c_{n+m-2} \leq \dots$$

$$\leq \gamma^{m-2} c_{n+2} \leq \gamma^{m-1} c_{n+1} \quad ,$$

so ist $\zeta \leq \gamma$.

Beweis:

Nach dem Satz von Perron - Frobenius sind $q_0, \dots, q_{m-1}$,
die ja nach (8a) die Komponenten des (im vorliegenden
Falle einzigen) Eigenvektors zu einem betragsmaximalen
Eigenwert sind, sämtlich positiv, und es gilt

$$\begin{aligned} q_j &= \frac{c_{n+m-j} q_{m-1} + \dots + c_{n+m-1} q_{m-j} + c_{n+m} q_{m-1-j}}{\varepsilon} > \\ &> \frac{\gamma^{-1} c_{n+m-j+1} q_{m-1} + \dots + \gamma^{-1} c_{n+m} q_{m-j}}{\varepsilon} = q_{j-1} \gamma^{-1} \end{aligned}$$

für $j = 1, \dots, m-1$, d.h.

$$\max_{j=0,1,\dots,m-2} \frac{q_j}{q_{j+1}} < \gamma$$

Nach dem Satz von Eneström - Kakeya (s.z.B. Specht [58],
S. 31) gilt daher $\zeta \leq \gamma$.

Bemerkung :

Das in Lemma 1 geforderte monotone Fallen der Koeffizienten läßt sich bei denjenigen Funktionen einfach untersuchen, für die das asymptotische Verhalten der Koeffizienten bekannt ist. Wir gehen aus von der Potenzreihenentwicklung

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k .$$

Hat z.B. F auf dem Rand des Konvergenzkreises nur algebraisch-logarithmische Singularitäten $z_1, \dots, z_p$, d.h. solche, die zu F nur Summanden der Form

$$(z-z_j)^s [\log(z-z_j)]^k \varphi_{j,k,s}(z)$$

mit komplexem $s, k \in \mathbb{Z}^+$

und in z_j regulärem $\varphi_{j,k,s}$

$$(\varphi_{j,k,s}(z_j) \neq 0)$$

"beitragen" und gibt es nur einen solchen Summanden mit lexikographisch maximalem "Gewicht"

$$G := \begin{cases} (\operatorname{Re} s, k) & \text{für } -s \notin \mathbb{Z}^+ \\ (s, k-1) & \text{für } -s \in \mathbb{Z}^+, k > 0 \\ (-\infty, 0) & \text{für } -s \in \mathbb{Z}^+, k = 0 \end{cases} ,$$

und zwar in z_1 ,

so gilt nach R. Jungen [31]

die folgende asymptotische Entwicklung:

$$c_n = \frac{A n^{s-1} (\log n)^k}{z_1^n} \left(1 + O[(\log n)^{-1}] \right)$$

Wenn alle c_n reell sind und darüber hinaus $A > 0$, $z_1 > 0$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt, so ist (9) für jedes $\gamma > \frac{1}{z_1}$ mit beliebigem m erfüllt, wenn nur n hinreichend groß ist; denn für hinreichend großes n gilt mit einem $\Omega > 0$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \left(\frac{n+1}{n} \right)^{s-1} \left(\frac{\log(n+1)}{\log n} \right)^k \frac{1}{z_1} \frac{1 + \frac{\Omega}{\log n}}{1 - \frac{\Omega}{\log n}} \leq \gamma.$$

Wenn auf dem Rande des Konvergenzkreises (mit dem Radius ρ) als einzige Singularitäten zwei einfache Pole in $\rho e^{i\psi_1}$ und $\rho e^{i\psi_2}$ liegen, so gilt

$$c_n = \rho^{-n} (g_1 e^{in\psi_1} + g_2 e^{in\psi_2}) + b_n,$$

wobei

$$|b_n| \leq \Omega' \sigma^{-n}$$

mit $\sigma > \rho$ ist.

Wenn $b_n \in \mathbb{R}$ und

$$(9a) \quad \operatorname{Re}(g_1) \sin n\psi_1 + \operatorname{Re}(g_2) \sin n\psi_2 + \operatorname{Im}(g_1) \cos n\psi_1 + \\ + \operatorname{Im}(g_2) \cos n\psi_2 = 0$$

für alle $n \geq 0$ gilt,

so sind natürlich auch alle c_n reell; wenn diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind, so können wegen des stärkeren Fallens der b_n nicht alle c_n reell sein.

Die Bedingung (9a) ist sicher für alle nichtnegativen n erfüllt, wenn

$$\psi_1 = -\psi_2 \quad \text{und} \quad g_1 = \overline{g_2}$$

ist. Dann gilt

$$\rho^{-n} (g_1 e^{in\psi_1} + g_2 e^{in\psi_2}) = \rho^{-n} \cos(n\psi_1 - \chi) \cdot 2|g_1|$$

mit $\chi = \arg g_1$.

Ist nun etwa

$$0 < \psi_1 < \frac{\pi}{2m+5}$$

so gibt es zu jedem $k^* \in \mathbb{N}$ ein n^* , sodaß gilt

$$2k^*\pi < n^*\psi_{1+\chi} < (n^*+1)\psi_{1+\chi} < \dots < (n^*+m)\psi_{1+\chi} < (2k^* + \frac{m+2}{2m+5})\pi$$

und daher für $\ell = 1, \dots, m$ und hinreichend großes k^*

$$\begin{aligned}
 c_{n^*+l} &\leq 2|g_1| \rho^{-n^*-l} \cos[(n^*+l)\psi_1 - \chi] + \Omega' \sigma^{-n^*-l} \leq \\
 &\leq \gamma \left[2|g_1| \rho^{-n^*-l+1} \cos[(n^*+l-1)\psi_1 - \chi] - \Omega' \sigma^{-n^*-l+1} \right] \leq \\
 &\leq \gamma c_{n^*+l-1}
 \end{aligned}$$

sowie

$$c_{n^*+m} \geq 2|g_1| \rho^{-n^*-m} \cos[(n^*+m)\psi_1 - \chi] - \Omega' \sigma^{-n^*-m} > 0 .$$

Dabei kann man

$$\gamma < \frac{1}{\rho} + \tau(n^*)$$

wählen mit

$$\lim_{n^* \rightarrow \infty} \tau(n^*) = 0 .$$

Liegen in verschiedenen Punkten des Konvergenzkreises algebraisch-logarithmische Singularitäten mit demselben "Gewicht", so wird, wie man sieht, der Nachweis von (9) für ein $m > 2$ schwieriger.

Nun wollen wir H abschätzen:

Satz 1:

Ist (9) erfüllt, so gilt

$$||H||_S \leq |c_{n+1}| \gamma^{n+1} (n+m-1)^{m-2} K(\gamma, m) \quad ,$$

wobei

$$K(\gamma, m) := \frac{m-1}{1-\gamma^2} \cdot \frac{\gamma}{(m-2)!} (1-\gamma)^{-m+1} \quad .$$

Beweis:

Zunächst haben wir nach (6b)

$$\begin{aligned} 0 < v_j &= \sum_{\ell=0}^j a_{j-\ell} c_{n+1+\ell} \leq \sum_{\ell=0}^j \gamma^{m-1-j+2\ell} c_{n+1} = \\ &= c_{n+1} \frac{\gamma^{m-1-j} (1-\gamma^{2j+2})}{1-\gamma^2} \quad . \end{aligned}$$

Wir benutzen nun die Entwicklung von $\frac{1}{Q(z)}$

mit Hilfe der Wronskischen Funktionen (s. z.B. Specht [58], S. 12) :

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{m-1} (z-\alpha_j)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k z^{-m+1-k}$$

Dabei gilt

$$\sigma_k = \sum \alpha_1^{\mu_1} \dots \alpha_{m-1}^{\mu_{m-1}} ,$$

und die Summation ist zu erstrecken über diejenigen nicht-negativen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m-1}$, für die

$$\mu_1 + \dots + \mu_{m-1} = k$$

ist. Man kann die Folge $(\mu_1, \dots, \mu_{m-1})$ der Exponenten auffassen als eine Verteilung von k ununterscheidbaren Objekten in $m-1$ Zellen, nämlich eine Verteilung von Exponenten 1 auf die Basen $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$, und es gibt

$$\binom{k+m-2}{m-2}$$

verschiedene solcher Verteilungen (s. z.B. Riordan [58], S. 92), sodaß wir die Abschätzung

$$|\sigma_k| \leq r^k \binom{k+m-2}{m-2}$$

erhalten. Nach (4b) ist

$$H(z) + \sum_{\ell=0}^n a_{\ell} z^{\ell} = \frac{\sum_{k=0}^{m-2} v_k z^{n+1+k}}{\prod_{j=1}^{m-1} (z - \alpha_j)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{m-2} v_k \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{\ell} z^{n+2+k-\ell-m} = \\
 &= \sum_{k=-n}^{\infty} z^{-k} \sum_{j=\min\{n+k-m+2, 0\}}^{m-2} v_j \sigma_{k+n+2+j-m}
 \end{aligned}$$

Wie man am Verhalten dieser Funktion in ∞ sieht,
ist (s. z.B. Weber [1898], S. 62)

$$\tilde{a}_k = \sum_{j=\min\{n+k-m+2, 0\}}^{m-2} v_j \sigma_{k+n+2+j-m}$$

sodaß wir H folgendermaßen abschätzen können:

$$||H||_S \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{a}_k| < \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-2} \frac{c_{n+1}}{1-\gamma^2} \binom{k+n+j}{m-2} \gamma^{k+n+1}$$

$$< \frac{c_{n+1} (m-1) \gamma}{(1-\gamma^2) (m-2)!} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k+n} \prod_{\ell=1}^{m-2} (k+n+\ell)$$

$$= \frac{c_{n+1} (m-1) \gamma}{(1-\gamma^2) (m-2)!} \frac{d^{m-2}}{d\gamma^{m-2}} \left[\frac{\gamma^{n+m-1}}{1-\gamma} \right]$$

$$= \frac{c_{n+1} (m-1) \gamma}{(1-\gamma^2) (m-2)!} \sum_{j=0}^{m-2} \binom{m-2}{j} \frac{\gamma^{n+m-1-j} (m-2-j)! \prod_{\ell=1}^{m-2} (n+m+\ell)}{(1-\gamma)^{m-1-j} \prod_{k=j+1}^{m-2} (n+m-k)} \leq$$

$$\leq \frac{c_{n+1}^{(m-1)} \gamma^{n+1}}{(1-\gamma^2)^{(m-2)}!} (n+m-1)^{m-2} \frac{\gamma}{1-\gamma} \left(1 + \frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{m-2} =$$

$$= c_{n+1} \gamma^{n+1} (n+m-1)^{m-2} K(\gamma, m) .$$

Mit der hier verwendeten Beweismethode kann man auch das folgende zeigen:

Satz 1a:

Gilt $\zeta \leq \tilde{\zeta} < 1$ und

$$(10) \quad |c_{n+1+j}| \leq \gamma^j |c_{n+1}| \quad \text{für } j = 1, \dots, m-1$$

mit einem $\gamma < 0,5$ sowie $\gamma < \tilde{\zeta}$, so ist

$$\|H\|_S \leq |c_{n+1}| \tilde{\zeta}^{n+1} (n+m-1)^{m-2} \frac{\tilde{\zeta}^{m+1} \gamma^{-m}}{(m-2)! (1-2\gamma^2) (\tilde{\zeta} \gamma^{-1} - 1)} (1-\tilde{\zeta})^{-m+1} .$$

Gilt (10) mit

$$\gamma < \frac{\sqrt{13} - 1}{6} \approx 0,43426 , \quad \text{so kann man zeigen, daß}$$

$$\zeta \leq \tilde{\zeta} = \gamma \frac{2 - 3\gamma^2}{1 - 2\gamma^2} < 1$$

ist. Dazu benutzt man (11) (s.u.) und die folgende Null-

stellenschranke von Fujiwara (s. z.B. Specht [58], S. 20):

Für beliebige positive $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ mit

$$\sum_{\mu=1}^{m-1} \lambda_{\mu} \leq 1$$

gilt

$$\zeta \leq \max_{\mu=1, \dots, m-1} \left(\frac{1}{\lambda_{\mu}} |q_{m-1-\mu}| \right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Im vorliegenden Fall wählt man

$$\lambda_{\mu} := A^{\mu-1}(1-A) \quad \text{mit} \quad A = \frac{2-3\gamma^2}{1-2\gamma^2}.$$

c) Vergleich mit der Minimalabweichung bei Approximation
von Polynomen höheren Grades (betragsmäßig fallende
Koeffizienten)

Die Abschätzung von $||H||_S$ anhand des linearen Gleichungssystems (7) hat das folgende Ergebnis, das im allgemeinen besser ist als das des Satzes 1a, wenn man dort die Nullstellenschranke

$$\zeta \leq \gamma \frac{2-3\gamma^2}{1-\gamma^2}$$

verwendet.

Satz 2 :

Gilt $m \leq n+2$ und

$$(10) \quad |c_{n+1+j}| \leq \gamma^j |c_{n+1}| \quad \text{für } j = 1, \dots, m-1$$

mit

$$\gamma < \frac{\sqrt{13} - 1}{6} \approx 0,43426 \quad ,$$

so ist mit der Bezeichnung $\xi := \gamma \frac{2-3\gamma^2}{1-2\gamma^2}$

$$||H|| \leq \frac{|c_{n+1}| \xi^{n+1} \gamma}{1-2\gamma-2\gamma^2+3\gamma^3} \quad .$$

Bemerkung:

Die Voraussetzung (10) ist für eine unendliche Folge von Indizes n mit beliebigem m erfüllt, wenn

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k$$

mit reellen c_k gilt und f sich holomorph fortsetzen läßt in einer Ellipse mit den Brennpunkten -1 und $+1$ und einer Halbachsensumme, die größer als $\frac{1}{\gamma}$ ist bzw. wenn

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

($\arg(c_k)$ beliebig) ist und F sich holomorph fortsetzen läßt in einem Kreis um 0 mit einem Radius, der größer als $\frac{1}{\gamma}$ ist. Erfüllt F darüber hinaus die Voraussetzungen des oben angegebenen Satzes von Jungen, so gilt (10) für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Wir zeigen zunächst

$$(11) \quad |q_j| \leq \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma^2} \gamma^{m-1-j} \quad (j = 0, \dots, m-2)$$

Dazu wählen wir

$$w := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2^{-\frac{1}{2}} \frac{c_{n+1}}{|c_{n+1}|} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow m\text{-te Komponente} \\ \\ \leftarrow 2m\text{-te Komponente} \end{array}$$

und erhalten

$$w^* c w = \frac{1}{2|c_{n+1}|} (\bar{c}_{n+1} c_{n+1} + c_{n+1} \bar{c}_{n+1}) ,$$

$$\text{also } \epsilon \geq |c_{n+1}| .$$

Es muß $q_{m-1} \neq 0$ gelten; denn für

$$\underline{v} := (v_0, \dots, v_{m-2}, 0, \bar{v}_0, \dots, \bar{v}_{m-2}, 0)' \quad \text{mit}$$

$$2 \sum_{j=0}^{m-2} v_j \bar{v}_j = 1$$

haben wir

$$\begin{aligned} |\underline{v}^* C \underline{v}| &= \\ &\leq 2|c_{n+m}| |v_1 \bar{v}_{m-2} + v_2 \bar{v}_{m-3} + \dots + v_{m-2} \bar{v}_1| + \dots \\ &\dots + 4|c_{n+4}| |v_{m-2} \bar{v}_{m-3}| + 2|c_{n+3}| |v_{m-2}|^2 \leq \\ &\leq |c_{n+1}| [(m-2) \gamma^{m-1} + \dots + 2\gamma^3 + \gamma^2] < \\ &< |c_{n+1}| \gamma^2 \frac{d}{d\gamma} \left[\frac{\gamma}{1-\gamma} \right] = |c_{n+1}| \frac{\gamma^2}{(1-\gamma)^2} \leq |c_{n+1}| \end{aligned}$$

wegen $\gamma < \frac{1}{2}$.

Wir können also o.B.d.A. $q_{m-1} = 1$ annehmen und erhalten

$$q_0 = \frac{\bar{c}_{n+m}}{\epsilon}, \quad \text{d.h.} \quad |q_0| \leq \gamma^{m-1}$$

sowie das folgende lineare Gleichungssystem für $q_1, \dots, q_{m-2}$:

$$(I - T) \hat{q} = g \quad ,$$

wobei gilt

$$\hat{q} = (q_1, \dots, q_{m-2}, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_{m-2})'$$

$$g = \left(\frac{\bar{c}_{n+m-1}}{\varepsilon}, \dots, \frac{\bar{c}_{n+2}}{\varepsilon}, \frac{c_{n+m-1}}{\varepsilon}, \dots, \frac{c_{n+2}}{\varepsilon} \right)'$$

$$T := \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{c}_{n+m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{c}_{n+4} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{n+m} & \dots & 0 & \bar{c}_{n+3} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & c_{n+4} & \vdots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n+m} & \dots & c_{n+4} & c_{n+3} & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dafür erhält man die Abschätzungen

$$|T| \leq \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma^{m-1} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \gamma^{m-1} & \dots & \gamma^3 & \gamma^2 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma^{m-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma^{m-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma^{m-1} & 0 & \dots & 0 \\ \gamma^{m-1} & \dots & \gamma^3 & \gamma^2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} =: \Gamma \quad |g| \leq \begin{pmatrix} \gamma^{m-2} \\ \vdots \\ \gamma^2 \\ \gamma \\ \gamma^{m-2} \\ \vdots \\ \gamma^2 \\ \gamma \end{pmatrix} =: \hat{g}$$

$$|\hat{g}| \leq |(I-T)^{-1}| |g| \leq \left| \sum_{i=0}^{\infty} T^i \right| \hat{g} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \Gamma^i \hat{g} \leq \frac{1}{1-\kappa} \hat{g} \quad ,$$

wobei

$$\kappa = \max_{j=1, \dots, 2m-4} \frac{(\Gamma \hat{g})_j}{(\hat{g})_j} \quad \text{ist.}$$

Weiter gilt

$$\frac{(\Gamma \hat{g})_j}{(\hat{g})_j} = (\gamma^{m-1} \gamma^j + \gamma^{m-2} \gamma^{j-1} + \dots + \gamma^{m-j} \gamma) \gamma^{-m+1+j}$$

$$(j = 1, 2, \dots, m-2)$$

und damit

$$\kappa \leq \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2},$$

also insgesamt

$$(11) \quad |q_j| \leq \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma^2} \gamma^{m-1-j} \quad (j = 0, 1, \dots, m-2).$$

Daraus ergibt sich mit (6b)

$$|v_j| \leq \frac{|c_{n+1}| \gamma^{m-1-j}}{1-2\gamma^2} \quad (j = 0, 1, \dots, m-2),$$

und damit erhalten wir

$$|a_n| = |v_{m-2}| \leq \frac{|c_{n+1}| \gamma}{1-2\gamma^2}$$

und weiter durch vollständige Induktion

$$|a_{n-\ell}| < \frac{|c_{n+1}| \gamma \xi^\ell}{1-2\gamma^2} \quad (\ell = 1, \dots, m-2);$$

denn wir haben wegen (11) und nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} |a_{n-\ell}| &= \left| v_{m-2-\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} a_{n-j} q_{m-1-\ell+j} \right| \leq \\ &\leq \frac{|c_{n+1}| \gamma}{1-2\gamma^2} \left[\gamma^\ell + \sum_{j=0}^{\ell-1} \gamma^j \left(1 + \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma^2} \right)^j \gamma^{\ell-j} \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma^2} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{|c_{n+1}| \gamma}{1-2\gamma^2} \gamma^\ell \left[1 + \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma^2} \right]^\ell .$$

Weiter gilt

$$(12) \quad |a_\mu| \leq \frac{|c_{n+1}| \gamma}{1-2\gamma^2} \xi^{n-\mu}$$

für $\mu = 0, 1, \dots, n-m-1$;

denn wenn wir die Gültigkeit von (12) für

$\mu+1, \mu+2, \dots, n-m-1$

anstelle von μ voraussetzen, haben wir

$$\begin{aligned} |a_\mu| &= \left| \sum_{\ell=1}^{m-1} a_{\mu+\ell} q_{m-1-\ell} \right| \leq \\ &\leq \frac{|c_{n+1}| \gamma}{1-2\gamma^2} \sum_{\ell=1}^{m-1} \xi^{n-\mu-\ell} \gamma^\ell \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma^2} = \\ &= \frac{|c_{n+1}| \gamma^{n-\mu+1}}{1-2\gamma^2} \left(\frac{2-3\gamma^2}{1-2\gamma^2} \right)^{n-\mu-1} \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma^2} \sum_{\ell=0}^{m-2} \left(\frac{2-3\gamma^2}{1-2\gamma^2} \right)^{-\ell} \\ &\leq \frac{|c_{n+1}| \gamma^{n-\mu+1}}{1-2\gamma^2} \left(\frac{2-3\gamma^2}{1-2\gamma^2} \right)^{n-\mu} . \end{aligned}$$

Schließlich haben wir für $z \in S^1$

$$\left| \sum_{j=0}^{m-2} \rho_j z^j \right| \leq \sum_{j=0}^{m-2} \sum_{\ell=0}^j |a_\ell q_{j-\ell}| \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{|c_{n+1}| \gamma}{1-2\gamma^2} \sum_{j=0}^{m-2} \sum_{\ell=0}^j \gamma^{n-\ell} \left(\frac{2-3\gamma^2}{1-2\gamma^2} \right)^{n-\ell} \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma^2} \gamma^{m-1-j+\ell} \\
 &\leq \frac{|c_{n+1}| \gamma^{n+1}}{1-2\gamma^2} \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma^2} \left(\frac{2-3\gamma^2}{1-2\gamma^2} \right)^n \sum_{j=0}^{m-2} \gamma^{m-1-j} \frac{1 - \left(\frac{2-3\gamma^2}{1-2\gamma^2} \right)^{-j-1}}{1 - \left(\frac{2-3\gamma^2}{1-2\gamma^2} \right)^{-1}} \\
 &= \frac{|c_{n+1}| \gamma^{n+1}}{1-2\gamma^2} \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma^2} \frac{2-3\gamma^2}{1-\gamma^2} \left(\frac{2-3\gamma^2}{1-2\gamma^2} \right)^n \gamma^{m-1} \sum_{j=0}^{m-2} \left[\gamma^{-j-\xi-j} \frac{1-2\gamma^2}{2-3\gamma^2} \right] \\
 &\leq \frac{|c_{n+1}| \xi^{n+1}}{1-2\gamma^2} \frac{\gamma}{1-\gamma} .
 \end{aligned}$$

Wir schätzen nun für $z \in S^1$ $|Q(z)|$ nach unten ab.

$$|Q(z)| = \left| \sum_{\ell=0}^{m-1} a_{\ell} z^{\ell} \right| \geq 1 - \sum_{\ell=1}^{m-1} \gamma^{\ell} \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma^2} \geq$$

$$\geq \frac{1-\gamma-2\gamma^2+2\gamma^3-\gamma+\gamma^3}{(1-\gamma)(1-2\gamma^2)} = \frac{1-2\gamma-2\gamma^2+3\gamma^3}{1-\gamma-2\gamma^2+2\gamma^3} > 0$$

wobei das letztere wegen $\gamma < \frac{\sqrt{13}-1}{6}$ gilt.

Daher gilt

$$||H||_S \leq \frac{\max_{z \in S^1} \left| \sum_{j=0}^{m-2} \rho_j z^j \right|}{\min_{z \in S^1} |Q(z)|} \leq \frac{|c_{n+1}| \xi^{n+1} \gamma}{1-2\gamma-2\gamma^2+3\gamma^3} .$$

Im Fall $m = 2$ erhält man bei $c_{n+1} \neq 0$

$$|\epsilon| = \frac{|c_{n+1}|}{2} + \sqrt{|c_{n+2}|^2 + \frac{|c_{n+1}|^2}{4}}$$

und weiter

$$q_0 = \frac{c_{n+2}}{\epsilon}$$

$$a_{n-u} = c_{n+1} (-1)^u q_0^{u+1} \quad (u = 0, 1, \dots, n)$$

$$|H(z)| = \left| \frac{p_0}{q_0 + q_1 z} \right| \leq \frac{|c_{n+1} (-1)^{n+1} \left(\frac{c_{n+2}}{\epsilon} \right)^{n+2}|}{1 - \left| \frac{c_{n+2}}{\epsilon} \right|},$$

sodaß also

$$|H(z)| \leq |c_{n+1}| \left(\frac{\tilde{\gamma}}{\frac{1}{2} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{1}{4}}} \right)^{n+2} \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{1}{4}}}{\frac{1}{2} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{1}{4}} - \tilde{\gamma}}$$

gilt für alle n mit

$$|c_{n+2}| \leq \tilde{\gamma} |c_{n+1}|$$

($\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}^+$ beliebig).

Bleibt bei gegebenem F m mit wachsendem n beschränkt, so ersieht man aus den Sätzen 1 und 2, daß für das aus $c_{n+1}, \dots, c_{n+m}$ unter den Voraussetzungen (9) bzw. (10) bestimmte $H_{(n,m)}$ gilt

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{||H_{(n,m)}||_5}{|c_{n+1}|} = 0$$

Wird unter der Voraussetzung (9) m_n zu n so gewählt, daß

$$m_n = o\left(\frac{n}{\log n}\right)$$

ist, so gilt (13) auch, denn dann ist

$$\frac{||H_{(n,m)}||_5}{|c_{n+1}|} < \text{const.} \cdot \exp [n \log \gamma + m_n \log(n+m_n) - (m_n-1) \log(1-\gamma)] .$$

Wenn wir (10) voraussetzen, so erhalten wir (13) für $m_n \leq n$.
Weil

$$\cos[(n+m) \arccos x - \sum_{j=1}^{m-1} \delta_j(x)]$$

in $[-1,1]$ mindestens $n+2$ mal alterniert, ist für reelle $c_{n+1}, \dots, c_{n+m}$

$$|\epsilon| = E_n \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} c_k T_k - n \right)$$

und daher

$$(14) \quad |\epsilon| - ||\eta|| \leq E_n \left(\frac{n+m}{k=n+1} c_k T_k \right) \leq$$

$$\leq \left\| \frac{n+m}{k=n+1} c_k T_k - P_{n,m} \right\| \leq |\epsilon| + ||\eta||.$$

Aufgrund der bekannten unteren Abschätzung für $E_n(f)$ (s. z.B. Meinardus [67], S.85) haben wir weiter

$$\frac{\left\| \frac{n+m}{k=n+1} c_k T_k - P_{n,m} \right\| - E_n \left(\frac{n+m}{k=n+1} c_k T_k \right)}{E_n \left(\frac{n+m}{k=n+1} c_k T_k \right)} \leq$$

$$\leq \frac{2||\eta||}{|c_{n+1}|} \leq \frac{2||H||_S}{|c_{n+1}|}.$$

Analog ergibt sich mit der Bezeichnung $P_{n,m}(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$

$$\frac{\left\| \frac{n+m}{k=n+1} c_k z^k - P_{n,m}(z) \right\|_S - E_n^S \left(\frac{n+m}{k=n+1} c_k z^k \right)}{E_n^S \left(\frac{n+m}{k=n+1} c_k z^k \right)} \leq \frac{2||H||_S}{|c_{n+1}|},$$

wobei

$$E_n^S(G) = \inf_{P \in \Pi_n} ||G - P||_S$$

für eine auf S^1 stetige Funktion G gesetzt wird.

d) Vergleich mit der Minimalabweichung bei Approximation
von holomorphen Funktionen

Wir wählen nun

$$(15) \quad p_{n,m}^* := \sum_{k=0}^n c_k T_k + p_{n,m}$$

als Approximation an f und können abschätzen:

$$(16) \quad ||f - p_{n,m}^*|| \leq$$

$$\leq E_n \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} c_k T_k \right) \left(1 + \frac{||n||}{|c_{n+1}|} \right) + || \sum_{k=n+m+1}^{\infty} c_k T_k ||$$

$$\leq E_n(f) \left(1 + \frac{2||n||}{|c_{n+1}|} \right) + 2 || \sum_{k=n+m+1}^{\infty} c_k T_k || \left(1 + \frac{||n||}{|c_{n+1}|} \right)$$

Wenn die Voraussetzungen von (13) erfüllt sind, kann man die Abschätzung

$$(17) \quad ||f - p_{n,m}^*|| = E_n(f) (1+o(1))$$

erreichen, wenn man nur noch

$$|| \sum_{k=m+n+1}^{\infty} c_k T_k || = o(E_n(f))$$

sichern kann.

Aufgrund der bekannten Abschätzung für die Norm der Fourier-Projektion (s. z.B. Cheney u. Price [70], S.282) gilt nun

$$|| \sum_{k=n+m_n+1}^{\infty} c_k T_k || \leq E_{n+m_n}(f) \left[2,44 + \frac{4}{\pi^2} \log(n+m_n) \right] .$$

Also wäre für die Gültigkeit von (17) zu fordern

$$(18) \quad E_{n+m_n}(f) \cdot \log n = o(E_n(f)) \quad .$$

Stattdessen kann man für $\ell \in \mathbb{N}$ voraussetzen

$$(19a) \quad |c_{n+m_n+\ell}| \leq \delta^{\ell-1} |c_{n+m_n+1}|$$

mit einem $\delta < 1$ und

$$(19b) \quad \frac{|c_{n+m_n+1}|}{|c_{n+1}|} = o(1) \quad .$$

Dann erhält man

$$|| \sum_{k=n+m_n+1}^{\infty} c_k T_k || < \frac{1}{1-\delta} |c_{n+m_n+1}| = o(|c_{n+1}|) = o(E_n(f))$$

wegen $E_n(f) \geq \frac{\pi}{4} |c_{n+1}|$.

Sind die Voraussetzungen des in der Bemerkung zu Lemma 1 zitierten Satzes von Jungen [31] erfüllt, so gelten (19a) mit $\gamma = \delta$ und (19b) für jedes n und m_n , falls nur m_n bei $n \rightarrow \infty$ über alle Grenzen wächst. Darüber hinaus gibt es für jede in einer Umgebung von $[-1,1]$ holomorphe Funktion f eine unendliche Folge von Indizes n , sodaß (19a) und (19b) gelten, falls nur m_n bei $n \rightarrow \infty$ über alle Grenzen wächst.

Setzt man

$$p_{n,m}^*(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k + p_{n,m}(z) \quad , \quad .$$

so erhält man analog zu (16) die folgende Abschätzung

$$||F - p_{n,m}^*||_S \leq E_n^S(F) \left(1 + \frac{2||H||_S}{|c_{n+1}|} \right) + 2 \left| \sum_{k=n+m+1}^{\infty} c_k z^k \right|_S \cdot \left(1 + \frac{||H||_S}{|c_{n+1}|} \right) \quad ,$$

und man kann

$$||F - p_{n,m}^*||_S \leq E_n^S(F) (1+o(1))$$

unter den zu (18) bzw. (19a) und (19b) entsprechenden Voraussetzungen erreichen; denn nach Geddes und Mason [75] gilt für den Operator S_n , der einer im Innern des Einheitskreises holomorphen und im abgeschlossenen Einheits-

kreis stetigen Funktion G mit

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k z^k$$

das Anfangsstück

$$\sum_{k=0}^n G_k z^k$$

der Taylorreihe zuordnet ,

$$||S_n|| \leq \frac{4}{\pi^2} \log n + 1 + o(1) \quad .$$

Es soll noch bemerkt werden, daß man die Abschätzung (17) auch erhalten kann, wenn man zur Bestimmung von $p_{n,m}^*$ nur die faktisch berechneten Näherungen $\hat{c}_k$ für die Koeffizienten c_k der Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen benutzt. Wir wollen wie bei der Fast Fourier Transform die folgende Integrationsformel verwenden:

$$(20) \quad \hat{c}_k = \frac{2}{n^*+1} \left[\sum_{j=1}^{n^*} f\left(\cos \frac{j\pi}{n^*+1}\right) \cos \frac{jk\pi}{n^*+1} + \frac{1}{2} f(1) + \frac{(-1)^k}{2} f(-1) \right]$$

Dann gilt aufgrund der diskreten Orthogonalitätsrelation für Tschebyscheff-Polynome (s. z.B. E.W.Cheney [66]) analog S. 11:

$$\hat{c}_m = c_m + \sum_{\ell=1}^{\infty} (c_{m+2\ell n^*} + c_{2\ell n^*-m}) \quad \text{für } m \in \mathbb{Z}^+.$$

Wenn wir nun für alle $\ell \in \mathbb{N}$ voraussetzen

$$(21) \quad |c_{n+\ell}| \leq \gamma^{\ell-1} |c_{n+1}|$$

mit einem $\gamma < 1$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} |\hat{c}_{n+\ell}| &\leq |c_{n+1}| \left[\gamma^{\ell-1} + \sum_{j=1}^{\infty} (\gamma^{\ell-1+2jn^*} + \gamma^{2jn^*-2n-\ell-1}) \right] \\ &\leq |\hat{c}_{n+1}| \gamma^{\ell-1} \frac{1+\gamma^{2n^*-2\ell-2n}}{1-2\gamma^{2n^*} - \gamma^{2n^*-2n-2}} \end{aligned}$$

Wenn wir noch $m_n \leq n$ und $n^*-2n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ voraussetzen, ergibt sich für $\ell = 2, \dots, m_n$

$$\begin{aligned} 1 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[\ell-1]{\frac{1+\gamma^{2n^*-2\ell-2n}}{1-2\gamma^{2n^*} - \gamma^{2n^*-2n-2}}} \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\gamma^{2n^*-2\ell-2n}}{\ell-1}}{1 - \frac{2\gamma^{2n^*} - \gamma^{2n^*-2n-2}}{\ell-1}} \leq 1. \end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich unter den Bedingungen

$$(22) \quad 0 < c_{n+l+1} \leq \gamma c_{n+l} \quad \forall \quad l \in \mathbb{N}$$

(mit $\gamma < 1$) und $n^* \geq 2n$:

$$\begin{aligned} 0 < \hat{c}_{n+l} &= c_{n+l} + \sum_{j=1}^{\infty} (c_{n+l+2jn^*} + c_{2jn^* - n - l}) \\ &\leq \gamma c_{n+l-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma c_{n+l-1+2jn^*} + c_{n+l-1} \frac{\gamma^{2(n^*-n-l)}}{1-\gamma^{2n^*}} \\ &< \left(\gamma + \frac{\gamma^{2(n^*-n-l)}}{1-\gamma^{2n^*}} \right) \hat{c}_{n+l-1} \quad , \end{aligned}$$

wobei für $1 \leq l \leq m_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma^{2(n^*-n-l)}}{1-\gamma^{2n^*}} = 0$$

ist, wenn $n^* \geq 2n$ und $m_n = O\left(\frac{n}{\log n}\right)$ gilt.

Als Approximation an f verwenden wir nun das Polynom

$$\hat{p}_{n,m}^* = \frac{\hat{c}_0}{2} + \hat{a}_0 + \sum_{k=1}^n (\hat{c}_k + \hat{a}_k) T_k \quad ,$$

wobei $\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_n$ aus $\hat{c}_{n+1}, \dots, \hat{c}_{n+m}$ wie $a_0, \dots, a_n$

aus $c_{n+1}, \dots, c_{n+m}$ berechnet werden, und erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned} ||f - \hat{p}_{n,m}^*|| &\leq ||\sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k - \sum_{j=0}^{n+m} \hat{c}_j T_j|| + ||\sum_{j=0}^{n+m} \hat{c}_j T_j - \hat{p}_{n,m}^*|| \\ &\leq 2 \sum_{\ell=n+m+1}^{\infty} |c_{\ell}| + E_n \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} \hat{c}_k T_k \right) \left(1 + \frac{2||\hat{\eta}||}{|\hat{c}_{n+1}|} \right). \end{aligned}$$

Dabei ist $\hat{\eta}$ die n in (1) entsprechende Funktion, wenn wir wieder von $\hat{c}_{n+1}, \dots, \hat{c}_{n+m}$ statt von $c_{n+1}, \dots, c_{n+m}$ ausgehen, und nach den obigen Ausführungen ist gesichert, daß für hinreichend großes n unter der Voraussetzung (21) mit $\gamma < \frac{\sqrt{13} - 1}{6}$ die entsprechende Größe $\hat{\xi}$ kleiner als 1 wird sowie bei $m_n \leq n$ und $n^* - 2n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{||\hat{\eta}||}{|\hat{c}_{n+1}|} = 0$$

und daß dieses ebenso unter der Voraussetzung (22) bei $m_n = o\left(\frac{n}{\log n}\right)$ gilt.

Wenn wir nun weiter $m_n \rightarrow \infty$ mit $n \rightarrow \infty$ voraussetzen, erhalten wir wegen $|c_{n+m_n+1}| \leq \gamma^{m_n} |c_{n+1}|$ schließlich

$$||f - \hat{p}_{n,m_n}^*|| \leq 2 \sum_{\ell=n+m_n+1}^{\infty} |c_{\ell}| +$$

$$+ \left[E_n(f) + \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} (c_k - \hat{c}_k) T_k + \sum_{k=n+m_n+1}^{\infty} c_k T_k \right| \right] \left(1 + \frac{2 \|\hat{\eta}\|}{|\hat{c}_{n+1}|} \right)$$

$$< E_n(f) \left(1 + \frac{2 \|\hat{\eta}\|}{|\hat{c}_{n+1}|} \right) + \frac{1}{1-\gamma} |c_{n+m_n+1}| \left(4 + \frac{4 \|\hat{\eta}\|}{|\hat{c}_{n+1}|} \right) = E_n(f) (1 + o(1)) .$$

e) Vergleich mit den Partialsummen der Entwicklung nach

Tschebyscheff - Polynomen

Wenn die Voraussetzung (10) mit $\gamma < \frac{\sqrt{13}-1}{6}$ erfüllt ist und alle c_k nichtnegativ sind bzw. wenn (9) gilt, liefert das Verfahren von Darlington für hinreichend großes n bei

$$\sum_{k=2}^m c_{n+k} \neq 0$$

sicher eine bessere Approximation als das Anfangsstück $S_n^T(f)$ der Entwicklung von f nach Tschebyscheff-Polynomen bzw. das Anfangsstück $S_n(F)$ der Taylorentwicklung von F . Dann ist nämlich

$$\|f - S_n^T(f)\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k$$

bzw.

$$\|F - S_n(F)\|_S = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k, \quad ,$$

während man aus (8a) mit $q_{m-1} = 1$ erhält

$$\begin{aligned} \epsilon &\leq c_{n+1} + \sum_{k=2}^m c_{n+k} |q_{m-k}| \leq \\ &\leq c_{n+1} + \max_{\ell=0, \dots, m-2} |q_{\ell}| \sum_{k=2}^m c_{n+k}. \end{aligned}$$

Dabei gilt unter Voraussetzung (10) mit $\gamma < \frac{\sqrt{13} - 1}{6}$

$$\max_{\ell=0, \dots, m-2} |q_{\ell}| \leq \frac{\gamma(1-\gamma^2)}{1-2\gamma^2} \leq 0,566$$

bzw. unter der Voraussetzung (9)

$$\max_{\ell=0, \dots, m-2} |q_{\ell}| \leq \gamma.$$

Weiterhin erhält man unter der Voraussetzung (9) aus (6a)

$$0 < q_j \leq \frac{1}{c_{n+1}} \gamma^j \sum_{i=m-j}^m c_{n+i} \quad (j = 0, 1, \dots, m-1)$$

und aus (6b)

$$0 < v_j \leq (j+1) \gamma^j \sum_{i=2}^m c_{n+i} \quad (j = 0, 1, \dots, m-2)$$

und damit analog zum Beweis des Satzes 1

$$||n|| \leq ||H||_S \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-2} \gamma^{k+n+2+2j-m} \binom{k+n+j}{m-2} (j+1) \sum_{r=2}^m c_{n+r}$$

$$\leq \left(\sum_{r=2}^m c_{n+r} \right) \frac{\gamma^{-m+2}}{(m-2)!} \left. \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right) \right|_{\tau=\gamma^2} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k+n} \prod_{\ell=1}^{m-2} (k+n+\ell)$$

$$\leq \left(\sum_{r=2}^m c_{n+r} \right) \frac{\gamma^{n-m+3} (n+m-1)^{m-2}}{(m-2)! (1-\gamma^2)^2} (1-\gamma)^{-m+1}$$

sowie unter der Voraussetzung $m_n = o\left(\frac{\log n}{n}\right)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{||H||_S}{\sum_{r=2}^{m_n} c_{n+r}} = 0.$$

Daraus ergibt sich schließlich

$$\left. \begin{aligned} &||f - p_{n,m}^*|| \\ &||F - p_{n,m}^*||_S \end{aligned} \right\} \leq$$

$$\leq c_{n+1} + \sum_{r=2}^m c_{n+r} \left[\gamma + \frac{\gamma^{n-m+3} (n+m-1)^{m-2}}{(m-2)! (1-\gamma^2)^2 (1-\gamma)^{m-1}} \right] + \sum_{k=n+m+1}^{\infty} c_k,$$

und der Faktor in eckigen Klammern wird unter den angegebenen Voraussetzungen für hinreichend großes n kleiner als 1.

Entsprechend erhält man unter der Voraussetzung (10)

$$\text{mit } \gamma < \frac{\sqrt{13} - 1}{6}$$

$$|q_j| \leq \frac{1}{c_{n+1}} \gamma^j \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma^2} \sum_{i=m-j}^m c_{n+i} \quad (j = 0, 1, \dots, m-1)$$

$$|v_j| \leq (j+1) \gamma^j \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma^2} \sum_{r=2}^m c_{n+r} \quad (j = 0, 1, \dots, m-2)$$

und damit wie in Satz 1a

$$||\eta|| \leq ||H||_S \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-2} (j+1) \gamma^j \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma^2} \left(\sum_{r=2}^m c_{n+r} \right) \zeta^{k+n+2+j-m} \binom{k+n-j}{m-2}$$

$$\leq \left(\sum_{r=2}^m c_{n+r} \right) \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma^2} \frac{\zeta^{-m+2}}{(m-2)!} \left. \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right) \right|_{\tau=\gamma\zeta} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta^{k+n} \prod_{\ell=1}^{m-2} (k+\ell+n)$$

$$\leq \left(\sum_{r=2}^m c_{n+r} \right) \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma^2} \frac{\zeta^{n-m+3} (n+m-1)^{m-2}}{(m-2)! (1-\gamma\zeta)^2 (1-\zeta)^{m-1}}$$

mit

$$\zeta = \gamma \frac{2-3\gamma^2}{1-2\gamma^2} < 1$$

sowie schließlich

$$\left. \begin{aligned} ||f - p_{n,m}^*|| \\ ||F - p_{n,m}^*||_S \end{aligned} \right\} \leq$$

$$\leq c_{n+1} + \left(\sum_{r=2}^m c_{n+r} \right) \left[\gamma \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma^2} + \frac{||H||_S}{\sum_{r=2}^m c_{n+r}} \right] + \sum_{k=n+m+1}^{\infty} c_k ,$$

wobei für $m_n = o\left(\frac{n}{\log n}\right)$ wieder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{||H||_S}{\sum_{r=2}^{m_n} c_{n+r}} = 0$$

gilt.

§ 3 Allgemeine Normabschätzungen und Minimalitätsaussagen für nichtlineare Approximations- verfahren

a) Definition der Approximationsoperatoren

In diesem Kapitel sollen die bisher behandelten Verfahren als semilineare beschränkte Abbildungen einer Teilmenge des Raumes $C(I)$ der auf $I := [-1, 1]$ stetigen Funktionen in die Menge Π_n der Polynome vom Grad $\leq n$ aufgefaßt werden, und es werden die Normen solcher Abbildungen abgeschätzt sowie Bedingungen für die Minimalität einer dieser Abbildungen innerhalb einer Familie von solchen angegeben.

Zu diesen Abbildungen gehören einerseits diejenigen, die gewissen auf I stetigen Funktionen f dasjenige Polynom $A_n f$ vom Grad $\leq n$ zuordnen, für das mit gewissen von f abhängigen Punkten $x_{j,f}$

$$(-1 \leq x_{0,f} < x_{1,f} < \dots < x_{n+1,f} \leq 1)$$

gilt

$$\max_{j=0, \dots, n+1} |f(x_{j,f}) - (A_n f)(x_{j,f})| \leq$$

$$\leq \max_{j=0, 1, \dots, n+1} |f(x_{j,f}) - p(x_{j,f})| ,$$

wo $p \in \Pi_n$ beliebig ist. Analytisch läßt sich $A_n f$ darstellen als

$$(1) \quad A_n f = \sum_{j=0}^{n+1} [f(x_{j,f}) - (-1)^j L_{n,f}(f)] \ell_{j,f} ;$$

dabei gilt

$$\omega_f(x) = \prod_{j=0}^{n+1} (x - x_{j,f})$$

$$\ell_{k,f}(x) = \frac{\omega_f(x)}{(x - x_{k,f}) \omega'_f(x_{k,f})}$$

$$L_{n,f}(f) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{f(x_{j,f})}{\omega'_f(x_{j,f}) \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k [\omega'_f(x_{k,f})]^{-1}}$$

(s. z.B. Meinardus [67], S.73).

Die Punkte $x_{0,f}, \dots, x_{n+1,f}$ wurden in §1 bestimmt aufgrund der Voriterationsformel

$$(2) \quad x_{j,f} = \xi_j + \frac{1 - \xi_j^2}{n+1} \cdot 2 \sum_{\ell=1}^{m-1} \frac{c_{n+1+\ell}}{c_{n+1}} U_{\ell-1}(\xi_j)$$

$$(j = 0, 1, \dots, n+1) ,$$

wobei gilt

$$c_k := \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt =: c_k(f) \quad (k \in \mathbb{N}) ,$$

$$\xi_j := -\cos \frac{j\pi}{n+1} \quad (j = 0, 1, \dots, n+1) .$$

Jetzt wollen wir allgemeiner annehmen, daß die $x_{j,f}$ bestimmt werden durch

$$(3) \quad x_{j,f} = \xi_j + \frac{(1-\xi_j^2)}{n+1} V_{f,n}(\xi_j) \quad (j=0, 1, \dots, n+1),$$

wobei für die Funktionen $V_{f,n}$ gelten soll

$$(3a) \quad V_{af,n} = V_{f,n} \quad \text{für alle reellen } a \text{ und}$$

$$(3b) \quad V_{f+p,n} = V_{f,n} \quad \text{für alle } p \in \Pi_n \text{ sowie}$$

$$(3c) \quad |V_{f,n}(x) - V_{f,n}(y)| \leq M_n |x-y|$$

$$(3d) \quad |V_{f,n}(x)| \leq M_n \\ \text{mit } M_n \leq \frac{n}{3} .$$

Dann gilt nämlich für $j = 0, 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} x_{j+1,f} - x_{j,f} &= \xi_{j+1} - \xi_j + \frac{1}{n+1} \left\{ [(1-\xi_{j+1}^2) - (1-\xi_j^2)] V_{f,n}(\xi_{j+1}) + \right. \\ &\quad \left. + (1-\xi_j^2) (V_{f,n}(\xi_{j+1}) - V_{f,n}(\xi_j)) \right\} \geq \\ &\geq (\xi_{j+1} - \xi_j) \left\{ 1 - \frac{1}{n+1} \left[(|\xi_j| + |\xi_{j+1}|) M_n + (1-\xi_j^2) M_n \right] \right\} > 0 , \end{aligned}$$

d.h. $A_n f$ kann gemäß (1) definiert werden.

Wenn wir nun mit gewissen Parametern $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$,
wobei etwa $|\alpha_\ell| \leq 2$ sei, setzen

$$(4) \quad v_{f,n} := 2 \sum_{\ell=1}^{m-1} \alpha_\ell \frac{c_{n+1+\ell}}{c_{n+1}} U_{\ell-1},$$

so gilt (3a) und (3b), und wegen

$$\left| \frac{(1-\xi_{j+1}^2) U_{\ell-1}(\xi_{j+1}) - (1-\xi_j^2) U_{\ell-1}(\xi_j)}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right| \leq 2 \ell$$

(s. §1, (9)) haben wir die Abschätzungen

$$x_{j+1,f} - x_{j,f} > 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n),$$

wenn wir

$$(5) \quad 8 \sum_{\ell=1}^{m-1} \left| \frac{c_{n+1+\ell}}{c_{n+1}} \right| \ell < n$$

voraussetzen.

Als Definitionsbereiche für die Abbildungen A_n wählen
wir die Mengen

$$D_{n,m} := \{f \in C[-1, 1] \mid [c_{n+1}(f) \neq 0 \wedge 8 \sum_{j=1}^{m-1} \left| \frac{c_{n+1+j}(f)}{c_{n+1}(f)} \right| j < n]$$

$$\forall f \in \Pi_n\},$$

wobei $m \in \{2, 3, \dots\}$ ist und

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k$$

im Sinn der quadratischen Konvergenz gilt,

und setzen für $p \in \Pi_n$

$$A_n(p) = p.$$

In $D_{n,m}$ sind für $\frac{m^2}{4} < n$ sicher diejenigen Funktionen f enthalten, für die

$$|c_{n+j}(f)| \leq |c_{n+1}(f)| \quad (j = 2, \dots, m)$$

gilt.

Analog zu den Abbildungen A_n kann man die Polynominterpolation an Punkten $y_{1,f}, \dots, y_{n+1,f}$ betrachten, die von der zu interpolierenden Funktion f abhängen; wir setzen also für $f \in C(I)$

$$(6) \quad B_n f = \sum_{j=1}^{n+1} f(y_{j,f}) \tilde{\chi}_{j,f},$$

wobei wieder

$$\tilde{\omega}_f(x) = \prod_{j=1}^{n+1} (x - y_{j,f})$$

und

$$\gamma_{j,f}(x) = \frac{\tilde{\omega}_f(x)}{(x-y_{j,f}) \tilde{\omega}'_f(y_{j,f})}$$

gesetzt wird.

Dabei werden $y_{1,f}, \dots, y_{n+1,f}$ mit

$$-1 \leq y_{1,f} < \dots < y_{n+1,f} \leq 1$$

wieder bestimmt durch

$$(7) \quad y_{j,f} = \eta_j + \frac{(1-\eta_j^2)}{n+1} V_{f,n}(\eta_j) \quad (j = 1, \dots, n+1),$$

wobei

$$\eta_j = -\cos \frac{2j-1}{2n+2} \pi \quad (j = 1, \dots, n+1)$$

gesetzt wird. Daß man $V_{f,n}$ wie in (4) mit

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 1 \quad \text{wählt, wird nahegelegt durch}$$

die Störungsrechnung von Hornecker [60], S.198 und dadurch, daß sich die $y_{j,f}$ in (7) ergeben durch einen (vereinfachten) Schritt des Newton - Verfahrens zur Bestimmung der Nullstellen von $f - p_n^0$, wobei p_n^0 das Polynom bester Approximation in $\xi_0, \dots, \xi_{n+1}$ ist;

denn es gilt (s. z.B. §1, S.20)

$$e_n := f - p_n^O = \sum_{r=0}^{\infty} \left[c_{(2r+1)(n+1)} T_{(2r+1)(n+1)} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{2n+1} c_{(2r+1)(n+1)+k} (T_{(2r+1)(n+1)+k} - T_{|n+1-k|}) \right]$$

und daher

$$e_n(\eta_j) \approx - 2 \sum_{k=1}^{2n+1} c_{n+1+k} (1 - \eta_j^2) U_n(\eta_j) U_{k-1}(\eta_j)$$

sowie

$$e'_n(\eta_j) \approx c_{n+1} U_n(\eta_j)(n+1) -$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{2n+1} c_{n+1+k} \frac{d}{d\delta} \{ \sin[(n+1)\delta] \sin k\delta \} \Big|_{\delta = \frac{(n-j+\frac{1}{2})\pi}{n+1}} \cdot \\ \cdot \frac{d}{dx} \arccos x \Big|_{x = \eta_j} \approx$$

$$= c_{n+1} U_n(\eta_j)(n+1) + 2 \sum_{k=1}^{2n+1} k c_{n+1+k} \cos \left[\frac{k(n-j+\frac{1}{2})\pi}{n+1} \right] U_n(\eta_j)$$

$$\approx c_{n+1} U_n(\eta_j)(n+1)$$

und damit

$$\eta_j + \frac{1-\eta_j^2}{n+1} \cdot 2 \sum_{\ell=1}^{m-1} \frac{c_{n+1+\ell}}{c_{n+1}} U_{\ell-1}(\eta_j) \approx \eta_j - \frac{e_n(\eta_j)}{e'_n(\eta_j)},$$

wenn man hinreichend starkes Fallen der Koeffizienten c_v voraussetzt.

Als Definitionsbereiche der Abbildungen B_n können wieder die Mengen $D_{n,m}$ gewählt werden, wenn $V_{f,n}$ durch (4) gegeben ist; denn aus (5) ergibt sich wieder

$$Y_{j+1,f} - Y_{j,f} > 0$$

$$Y_{n+1,f} = \eta_{n+1} + (1-\eta_{n+1}) \frac{(1+\eta_{n+1}) V_{f,n}(\eta_{n+1})}{n+1} \leq 1$$

$$Y'_{1,f} \geq -1,$$

und für $p \in \Pi_n$ setzen wir $B_n p = p$.

Auch das Verfahren von Darlington, in dem gewissen Funktionen aus $C(I)$ die entsprechenden Polynome $p_{n,m}^*$ gemäß §2(15) zugeordnet werden, kann aufgefaßt werden als Abbildung

$$\hat{A}_{n,m} : \hat{D}_{n,m} \rightarrow \Pi_n,$$

wobei

$$\hat{D}_{n,m} = \{ f \mid f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k \wedge$$

$$\forall \ell \in \{2, \dots, m\} \mid c_{n+\ell} \mid \leq 0,434^{\ell} \mid c_{n+1} \mid \}$$

und

$$\hat{A}_{n,m}(f) = \sum_{k=0}^n c_k T_k$$

im Fall von $c_{n+1}(f) = \dots = c_{n+m}(f) = 0$ gesetzt wird.

Definition 1:

Sei $D \subset C(I)$ und Y ein linearer Teilraum von $C(I)$.

Eine Abbildung

$$A : D \rightarrow Y$$

heißt semilinear, wenn mit f auch αf für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f+p$ für beliebiges $p \in Y$ zu D gehören und in diesen Fällen

$$A(\alpha f) = \alpha A(f) \quad (\text{Homogenität})$$

$$A(f+p) = A(f) + p$$

gilt.

Bemerkung 1:

Die Abbildungen A_n, B_n mit (3) bzw. (7) sind auf $D_{n,m}$ sowie $\hat{A}_{n,m}$ auf $\hat{D}_{n,m}$ semilinear.

Es gilt nämlich $x_{j,f} = x_{j,\alpha f}$ nach (3) bzw.

$y_{j,f} = y_{j,\alpha f}$ nach (7), wenn $f \in D_{n,m}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist;

weiter gilt mit $p \in \Pi_n$

$$x_{j,f} = x_{j,f+p}$$

bzw.

$$y_{j,f} = y_{j,f+p} \quad ,$$

und die Semilinearität von A_n und B_n ersieht man nun aus (1) bzw. (6) und der Tatsache, daß das Polynom bester Approximation im Sinn von (1) bzw. das Interpolationspolynom zu einem $p \in \Pi_n$ dieses p selbst ist. Um die Semilinearität von $\hat{A}_n$ zu sehen, ist zu bemerken, daß die Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ von $p_{n,m}$ aufgrund von §2, (6b), (7), (8) homogene Funktionen von f sind und nicht von $c_0(f), c_1(f), \dots, c_n(f)$ abhängen.

b) Normen von Approximationsoperatoren

Wir untersuchen nun die Normen der oben eingeführten Operatoren, die wir wegen der Homogenität wie üblich definieren können, wobei wir in $C(I)$ die Maximumsnorm zugrundelegen wollen.

Definition 2 :

Sei $D \subset C(I)$, $\alpha D \subset D$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und
 $A : D \rightarrow C(I)$;

dann ist die Norm von A gegeben durch

$$(8) \quad \sup_{x \in D \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} =: \|A\| =: \|A\|_D$$

Existiert $\|A\|$, so nennen wir A beschränkt.

Bemerkung 2:

Wegen der Homogenität gilt

$$\|A\| = \sup \{ \|Ax\| \mid x \in D \wedge \|x\| = 1 \}.$$

Bemerkung 3:

$\|A\|$ existiert genau dann, wenn A stetig in 0 ist; denn beim Beweis dieser Aussage für lineare Operatoren (s.z.B. Hirzebruch - Scharlau [71], S.26) wird die Additivität nicht benutzt.

Es ist nicht gelungen, die Norm der Operatoren A_n und B_n durch die Maxima von Funktionen (wie z.B. die Lebesgue - Funktionen im Falle der Interpolation an festen Knoten) auszudrücken; man kann jedoch zeigen: .

Lemma 1:

Die Normen der Abbildungen A_n und B_n , bei denen die $x_{j,f}$ nach (3), (4) bzw. die $y_{j,f}$ nach (4), (7) bestimmt werden, sind auf $D_{n,m}$ endlich.

Beweis:

Ist $f \in D_{n,m} \setminus \Pi_n$, so gilt für $k = 0, 1, \dots, n+1$

$$|\omega'_f(x_{k,f})| \geq$$

$$\geq \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^{n+1} (\xi_k - \xi_\ell) \left[1 - 8 \sum_{j=1}^{m-1} \frac{|c_{n+1+j}(f)|}{|c_{n+1}(f)|} \right]^{n+1} \geq \delta^* > 0$$

mit einem von f unabhängigen δ^*
und weiter

$$||\omega_f|| \leq 2^{n+1}.$$

Dann können wir wegen $|L_{n,f}(f)| \leq E_n(f)$ abschätzen

$$\begin{aligned} ||A_n f|| &\leq (n+2) (||f|| + |L_{n,f}(f)|) \max_{j=0, \dots, n+1} ||l_{j,f}|| \\ &\leq (n+2) 2 ||f|| \frac{2^{n+1}}{\delta^*}. \end{aligned}$$

Entsprechende Abschätzungen ergeben sich für die B_n .

Bemerkung 4:

Werden die $x_{j,f}$ nach (3) bzw. die $y_{j,f}$ nach (7) mit irgendeiner Funktion $V_{f,n}$ bestimmt, so folgt

$$|\omega'_f(x_{k,f})| \geq \delta^* > 0$$

und damit die Existenz von $||A_n||$ und entsprechend von $||B_n||$, wenn man jetzt voraussetzt, daß für die bei der Bildung von $||A_n||$ bzw. $||B_n||$ zu berücksichtigenden f (3c) und (3d) gilt.

(14), (15)
Wir schätzen nun noch mit Hilfe von §2 und der bekannten Schranke für die Lebesgue - Konstante (s. z.B. Cheney u. Price [70], S.282) die Normen von $\hat{A}_{n,m}$ ab:

$$\begin{aligned} ||\hat{A}_{n,m} f|| &\leq ||f|| + ||p_{n,m} - (\sum_{k=n+1}^{n+m} c_k T_k + \sum_{l=n+m+1}^{\infty} c_l T_l)|| \leq \\ &\leq ||f|| + E_n(\sum_{k=n+1}^{n+m} c_k T_k) + |c_{n+1}| o(1) + \\ &+ ||f|| \left(\frac{4}{\pi^2} \log(n+m) + 2,44 \right) \leq \\ &\leq ||f|| \left(\frac{8}{\pi^2} \log(n+m) + 6,88 + o(1) \right) \quad . \end{aligned}$$

Da man jedoch beim Verfahren von Darlington nicht sinnvoll variable Parameter wie die $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ in (4) einführen kann, soll es nicht weiter betrachtet werden.

Die Normen von einigen Abbildungen A_n und B_n lassen sich mit Hilfe einer Methode von Bernstein [31] besser abschätzen als in Lemma 1.

Satz 1:

Werden in A_n und B_n die $x_{j,f}$ gemäß (3) bzw. die $y_{j,f}$ gemäß (7) bestimmt und werden die Definitionsbereiche D_n^* so gewählt, daß für alle $f \in D_n^*$ gilt $V_{f,n} \in C^2(I)$ und (3a), (3b) sowie

$$(9) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in D_n^*} \sup \{ ||V_{f,n}||, ||V'_{f,n}||, ||V''_{f,n}|| \} \leq M,$$

dann gilt

$$||A_n||_{D_n^*} \leq \frac{2}{\pi} \log n (1 + O(1))$$

$$||B_n||_{D_n^*} \leq \frac{2}{\pi} \log n (1 + O(1)) \quad .$$

Bemerkung 5:

Wird $V_{f,n}$ gemäß (4) bestimmt, so kann man die Gültigkeit von (9) erreichen, wenn man $m \in \{2, 3, \dots\}$ und

$$D_n^{*(m)} = \{f \in C[-1, 1] : \sum_{\ell=1}^{m-1} \left| \frac{c_{n+1+\ell}}{c_{n+1}} \right| \ell^5 \leq \frac{M}{4} \quad \vee$$

$$c_{n+1}(f) = \dots = c_{n+m}(f) = 0 \}$$

sowie

$$x_{j,f} = \xi_j \quad \text{bzw.} \quad y_{j,f} = \eta_j$$

im Fall

$$c_{n+1}(f) = \dots = c_{n+m}(f) = 0 \quad \text{wählt.}$$

Beweis:

Wir führen den Beweis für die Abbildungen A_n durch; im Falle der B_n verläuft er analog.

Zunächst ergibt sich

$$\begin{aligned} \|A_n f\| &= \max_{x \in I} \left| \sum_{j=0}^{n+1} \left[f(x_{j,f}) - (-1)^j L_{n,f}(f) \right] l_{j,f}(x) \right| \leq \\ &\leq \max_{x \in I} \sum_{j=0}^{n+1} |l_{j,f}(x)| \left(\|f\| + \|f\| \max_{x \in I} \left| \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j l_{j,f}(x) \right| \right), \end{aligned}$$

sodaß wir also nur

$$\Lambda_{n,f}(x) := \sum_{j=0}^{n+1} |l_{j,f}(x)|$$

und

$$g_{n,f}(x) := \left| \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j l_{j,f}(x) \right|$$

abzuschätzen brauchen.

Dazu setzen wir

$$z(x) := x + \frac{V_{f,n}(x)}{n+1} (1 - x^2)$$

und

$$\begin{aligned} w_{n,f}(x) &:= \frac{\omega_{n,f}(z(x))}{U_n(x) (1-x^2) 2^{-n}} = \\ &= \frac{\prod_{j=0}^{n+1} \left[x + \frac{V_{f,n}(x) (1-x^2)}{n+1} - \xi_j - \frac{V_{f,n}(\xi_j) (1-\xi_j^2)}{n+1} \right]}{\prod_{j=0}^{n+1} (x-\xi_j)} = \\ &= \prod_{j=0}^{n+1} \left[1 + \frac{V_{f,n}(x) (1-x^2) - V_{f,n}(\xi_j) (1-\xi_j^2)}{(n+1) (x-\xi_j)} \right] \end{aligned}$$

sowie

$$\rho_{j,n,f}(x) := \frac{V_{f,n}(x) (1-x^2) - V_{f,n}(\xi_j) (1-\xi_j^2)}{x - \xi_j},$$

wobei $w_{n,f}(\xi_j)$ und $\rho_{j,n,f}(\xi_j)$ durch die entsprechenden Grenzwerte, die ja nach Voraussetzung existieren, definiert werden.

Wir bestimmen nun

$$\begin{aligned} \omega'_{n,f}(x_{k,f}) &= \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^{n+1} (\xi_k - \xi_j) \prod_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^{n+1} \left[1 + \frac{V_{f,n}(\xi_k)(1-\xi_k^2) - V_{f,n}(\xi_j)(1-\xi_j^2)}{(n+1)(\xi_k - \xi_j)} \right] = \\ &= \frac{d}{dx} \left[\frac{U_n(x)(1-x^2)}{2^n} \right] \Big|_{x=\xi_k} \frac{w_{n,f}(\xi_k)}{1 + \frac{\rho_{k,n,f}(\xi_k)}{n+1}} . \end{aligned}$$

Da die Funktionen

$$Y_{k,n,f}(x) := \frac{w_{n,f}(x)}{1 + \frac{\rho_{k,n,f}(x)}{n+1}}$$

gleichmäßig bezüglich k, n und f nach oben und unten beschränkt sind, wie noch gezeigt wird, gilt für $x \in I$

$$\left| \frac{Y_{k,n,f}(x)}{Y_{k,n,f}(\xi_k)} \right| \leq \tilde{M} .$$

Da weiterhin die Funktionen $Y_{k,n,f}$ gleichmäßig und bezüglich k, n und f gleichgradig stetig sind, wie ebenfalls noch gezeigt wird, können wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ bestimmen, sodaß für

$$|x - \xi_k| < \delta$$

gilt

$$\left| \frac{y_{k,n,f}(x)}{y_{k,n,f}(\xi_k)} - 1 \right| < \epsilon.$$

Daher können wir abschätzen

$$\begin{aligned} \Lambda_{n,f}(z(x)) &= \sum_{k=0}^{n+1} \left| \frac{\omega_{n,f}(z(x))}{(z(x) - x_{k,f}) \omega'_{n,f}(x_{k,f})} \right| \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left| \frac{U_n(x) (1-x^2)^{-n}}{(x-\xi_k) \frac{d}{dx} [U_n(x) (1-x^2)^{-n}] \Big|_{x=\xi_k}} \right| \cdot \\ &\quad \cdot \frac{w_{n,f}(x)}{1 + \frac{\rho_{k,n,f}(x)}{n+1}} \left(\frac{w_{n,f}(\xi_k)}{1 + \frac{\rho_{k,n,f}(\xi_k)}{n+1}} \right)^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left| \frac{U_n(x) (1-x^2)}{(x-\xi_k) (n+1)} \right| \frac{y_{k,n,f}(x)}{y_{k,n,f}(\xi_k)} \\ &\leq \sum_{k, |x-\xi_k| < \delta} |l_{k,o}(x)| \epsilon + \\ &\quad + \sum_{k, |x-\xi_k| > \delta} |l_{k,o}(x)| \hat{M} + \sum_{k=0}^{n+1} |l_{k,o}(x)| \end{aligned}$$

$$\text{mit } l_{k,0}(x) = \frac{\hat{w}(x)}{(x-\xi_k) \hat{w}'(\xi_k)} \quad \text{und} \quad \hat{w}(x) = U_n(x) (1-x^2),$$

Dabei gilt (s. Schönhage [71], S.128)

$$\sum_{k=0}^{n+1} |l_{k,0}(x)| \leq \frac{2}{\pi} \log(n+1) + O(1)$$

sowie mit $m_x \in \{0, 1, \dots, n+1\}$

die Abschätzung (s. Schönhage [71], S.129)

$$|l_{k,0}(x)| \leq \frac{\frac{4}{\pi}}{|k-m_x|},$$

wo

$$x = \cos\left[(n+1-m_x) \frac{\pi}{n+1} + \tau\right]$$

und

$$-\frac{\pi}{2n+2} < \tau \leq \frac{\pi}{2n+2} \quad \text{ist.}$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{k, |x-\xi_k| > \delta} |l_{k,0}(x)| &\leq \sum_{k, |x-\xi_k| > \delta} \frac{4}{\pi |k-m_x|} \leq \\ &\leq \sum_{k, |m_x-k| > (n+1)\frac{\delta}{5}} \frac{4}{\pi |k-m_x|} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{8}{\pi} \left[\log(n+1) + 1 - \log\left((n+1) \frac{\delta}{5}\right) \right] \leq \frac{8}{\pi} \left(\log \frac{5}{\delta} + 1 \right) ;$$

denn es gilt

$$|x - \xi_k| \leq \delta , \quad \text{falls}$$

$$|m_x - (n+1-k)| \leq \frac{n+1}{5} \delta$$

und n hinreichend groß ist.

Wir zeigen nun zunächst, daß die $y_{k,n,f}$ und $\frac{1}{y_{k,n,f}}$ gleichmäßig beschränkt sind;

es gilt nämlich für $x \in I$

$$|y_{k,n,f}(x)| = \left| \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n+1} \left[1 + \frac{v_{f,n}(x)(1-x^2) - v_{f,n}(\xi_j)(1-\xi_j^2)}{(n+1)(x-\xi_j)} \right] \right| \leq$$

$$\leq \left[1 + \frac{\sup_{z \in I} \left| \frac{d}{dz} [v_{f,n}(z)(1-z^2)] \right|}{n+1} \right]^{n+1} \leq$$

$$\leq \exp \left(\sup_{z \in I} \left| \frac{d}{dz} [v_{f,n}(z)(1-z^2)] \right| \right) =: \tilde{M}$$

$$|y_{k,n,f}(x)| \geq \exp \left(-\sup_{z \in I} \left| \frac{d}{dz} [v_{f,n}(z)(1-z^2)] \right| \right) .$$

Außerdem haben wir für $x, y \in I$

$$|y_{k,n,f}(x) - y_{k,n,f}(y)| \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^{n+1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{\ell-1} \left[1 + \frac{\rho_{j,n,f}(x)}{n+1} \right] \left| \frac{\rho_{\ell,n,f}(x) - \rho_{\ell,n,f}(y)}{n+1} \right| \cdot \prod_{\substack{i=\ell+1 \\ i \neq k}}^{n+1} \left| 1 + \frac{\rho_{i,n,f}(y)}{n+1} \right| \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{M}}{n+1} \sum_{\ell=0}^{n+1} \left| \frac{v_{f,n}(x)(1-x^2) - v_{f,n}(\xi_j)(1-\xi_j^2)}{x - \xi_j} - \frac{v_{f,n}(y)(1-y^2) - v_{f,n}(\xi_j)(1-\xi_j^2)}{y - \xi_j} \right|$$

und weiter in dem Fall, daß ξ_j zwischen x und y liegt

$$|\rho_{j,n,f}(x) - \rho_{j,n,f}(y)| =$$

$$= \left| \frac{d}{dx} [v_{f,n}(x)(1-x^2)] \Big|_{\tilde{x}_j} - \frac{d}{dx} [v_{f,n}(x)(1-x^2)] \Big|_{\tilde{y}_j} \right|$$

$$= \left| \frac{d^2}{dx^2} [v_{f,n}(x)(1-x^2)] \Big|_{\tilde{z}_j} (\tilde{x}_j - \tilde{y}_j) \right|$$

$$\leq |x-y| \sup_{z \in I} \left| \frac{d^2}{dz^2} [v_{f,n}(z)(1-z^2)] \right|$$

mit gewissen $\tilde{x}_j, \tilde{y}_j, \tilde{z}_j$ zwischen x und y ,
bzw. in dem Fall, daß ξ_j nicht zwischen x und y liegt,

$$\begin{aligned} & |\rho_{j,n,f}(x) - \rho_{j,n,f}(y)| = \\ & = \left| \frac{d}{dz} \left[\frac{v_{f,n}(z)(1-z^2) - v_{f,n}(\xi_j)(1-\xi_j^2)}{z - \xi_j} \right] \right|_{\tilde{z}_j} (x-y) = \\ & = |x-y| \left| \frac{\frac{d}{du} [v_{f,n}(u)(1-u^2)] \Big|_{\tilde{z}_j} - \frac{v_{f,n}(\tilde{z}_j)(1-\tilde{z}_j^2) - v_{f,n}(\xi_j)(1-\xi_j^2)}{\tilde{z}_j - \xi_j}}{\tilde{z}_j - \xi_j} \right| \\ & = |x-y| \left| \frac{\frac{d}{du} [v_{f,n}(u)(1-u^2)] \Big|_{\tilde{z}_j} - \frac{d}{du} [v_{f,n}(u)(1-u^2)] \Big|_{z_j^*}}{\tilde{z}_j - \xi_j} \right| \\ & \leq |x-y| \sup_{z \in I} \left| \frac{d^2}{dz^2} [v_{f,n}(z)(1-z^2)] \right| \end{aligned}$$

mit $\tilde{z}_j$ zwischen x und y sowie z_j^* zwischen $\tilde{z}_j$ und ξ_j , sodaß sich schließlich ergibt

$$\begin{aligned} & |y_{k,n,f}(x) - y_{k,n,f}(y)| \leq \\ & < \tilde{M} |x-y| \sup_{z \in I} \left| \frac{d^2}{dz^2} [v_{f,n}(z)(1-z^2)] \right| . \end{aligned}$$

Zum Schluß zeigen wir noch, daß die $g_{n,f}$ mit wachsendem n beschränkt bleiben:

$$\begin{aligned}
 |g_{n,f}(z(x))| &= \left| \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \ell_{j,f}(z(x)) \right| = \\
 &= \left| \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(-1)^j \omega_{f,n}(z(x))}{\omega'_{f,n}(\xi_j)(z(x) - x_{j,f})} \right| \leq \\
 (9a) \quad &\leq \left| \sum_{j=0}^{n+1} // \frac{U_n(x)(1-x^2)}{(n+1)(x-\xi_j)} \right| \max_{k=0,1,\dots,n+1} \left| \frac{y_{k,n,f}(x)}{y_{k,n,f}(\xi_k)} \right| \leq \tilde{M}
 \end{aligned}$$

Das Polynom, dessen Betrag wir in (9a) gebildet haben, ist nämlich das Tschebyscheff - Polynom T_{n+1} .

Bemerkung 6:

Wenn für Operatoren $P_n : D_n \rightarrow \Pi_n$ auf einem gemeinsamen Definitionsbereich $D \subset C(I)$ gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\|_D \leq K, \quad .$$

so kann man aus der Semilinearität wie üblich auf die gleichmäßige Konvergenz der $P_n f$ gegen f für alle $f \in D$ schließen; denn zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein Polynom q mit

$$\|f - q\| < \varepsilon, \quad ,$$

dessen Grad etwa n_0 sei. Für $n \geq n_0$ erhalten wir dann

$$||f - P_n f|| = ||f - q - P_n(f-q)|| \leq \epsilon(1+K) \quad .$$

Bemerkung 7:

Ist $P_n : D \rightarrow \Pi_n$ semilinear und beschränkt mit $D \subset C(I)$ und ist $q_n^* \in \Pi_n$ mit

$$||f - q_n^*|| = E_n(f) \quad ,$$

so haben wir

$$||f - P_n f|| = ||f - q_n^* - P_n(f - q_n^*)|| \leq ||I - P_n|| E_n(f) \quad .$$

c) Minimalität bei Approximationsoperatoren

Wir geben nun eine hinreichende Bedingung dafür an, daß die Norm eines Operators wie A_n minimal in einer Familie von solchen Operatoren ist; ähnliche Aussagen wurden für den Fall linearer Operatoren von Cheney und Price in [70a] und späteren Arbeiten gemacht.

Bemerkung 8:

Sei T ein kompakter hausdorffscher Raum, Y ein endlich-dimensionaler Teilraum von $C(T)$, D eine Teilmenge von $C(T)$ mit $\alpha D \subset D$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

sowie $\mathcal{U}$ eine Menge von beschränkten homogenen Abbildungen von D auf Y . Ist $P_1 \in \mathcal{U}$ mit

$||P_1|| > \inf_{P \in \mathcal{U}} ||P||$, so gibt es ein $P_0 \in \mathcal{U}$ mit

$$(10) \quad 0 < \inf \{ |P_1 f(t) - P_0 f(t)| \mid$$

$$t \in T, f \in D, ||f|| = 1, ||P_1|| = P_1 f(t) \} .$$

Bemerkung 9:

Da mit $g \in D$ auch $-g$ zu D gehört, ist (10)

äquivalent zu

$$0 < \inf \{ [P_1 f(t) - P_0 f(t)] \operatorname{sgn} P_1 f(t) \mid$$

$$t \in T, f \in D, ||f|| = 1, ||P_1|| = |P_1 f(t)| \}$$

Beweis der Bemerkung 8:

Wir setzen entsprechend dem Vorgehen von Cheney und Price

$$M := \{(f, t) \mid t \in T, f \in D, ||f|| = 1, ||P_1|| = P_1 f(t)\}$$

und können durch Auswahl einer geeigneten Teilfolge aus einer Moore - Smith - Folge $(f_i, s_i)_{i \in J}$ mit $f_i \in D$, $s_i \in T$ und

$$\lim_{i \in J} P_1 f_i(s_i) = ||P_1||$$

sehen, daß diese Menge nicht leer ist.

Da nach Voraussetzung ein $P_0 \in \mathcal{U}$ mit

$\|P_1\| > \|P_0\|$ existiert, gilt für $(f, t) \in M$

$$P_1 f(t) - P_0 f(t) \geq \|P_1\| - \|P_0\| > 0 \quad .$$

Zum Schluß zeigen wir, daß die Minimalität der Norm eines Operators wie A_n innerhalb einer Familie von solchen Operatoren äquivalent ist zu anderen Minimaleigenschaften; ein Analogon für den Fall linearer Projektionsoperatoren findet sich bei Cheney und Price [70].

Lemma 2:

Sei Y ein endlich-dimensionaler linearer Unterraum von $C(I)$, M_Y die zugehörige metrische Projektion, d.h. die Abbildung, die einem Element von $C(I)$ seine beste Approximation aus Y zuordnet, und es sei $P : D \rightarrow Y$ eine semilineare, beschränkte, auf einer Teilmenge D von $C(I)$ definierte Abbildung. Dann gilt

$$\|M_Y - P\|_D \leq \|P\|_D \quad .$$

Beweis:

Ist $f \in D$, dann gilt

$$M_Y f - P f = P(M_Y f - f)$$

also

$$M_Y - P = P \circ (M_Y - I) \quad .$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \|M_Y - P\|_D &= \|P \circ (M_Y - I)\|_D = \\ &= \sup \{ \|P \circ (M_Y - I) f\| \mid f \in D \wedge \|f\| = 1 \} \\ &\leq \sup \{ \|Pg\| \mid g \in D \wedge \\ &\quad \|g\| \leq \sup \{ \|M_Y f - f\| \mid f \in D \wedge \|f\| \leq 1 \} \} \\ &= \sup \{ \|Pg\| \mid g \in D \wedge \|g\| \leq 1 \} \cdot \\ &\cdot \sup \{ \|M_Y f - f\| \mid f \in D \wedge \|f\| \leq 1 \} = \|P\|_D \|M_Y - I\|_D \end{aligned}$$

Wegen der für alle $x \in C(I)$ gültigen Abschätzung

$$(12) \quad \|x - M_Y x\| \leq \|x\|$$

erhalten wir schließlich die Behauptung.

Lemma 3:

Voraussetzung:

Sei D eine Teilmenge von $C(I)$ mit $\alpha D \subset D$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Sei Y ein n -dimensionaler linearer Unterraum von $C(I)$.

Zu jedem $g \in D \setminus Y$ sei eine Umgebung bezüglich der Norm

$$||h||_1 = \int_{-1}^1 \frac{|h(t)| dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

in D enthalten.

Die Abbildung $P : D \rightarrow Y$ sei mit $m^* \geq 0$ definiert durch

$$(13) \quad P f = \sum_{i=1}^{n+m^*} f(t_{i,f}) w_{i,f}$$

für $f \in D$, wobei $t_{i,f} \in I$ und $w_{i,f} \in Y$ stetig von f abhängen, wenn auf D die Norm $|| \cdot ||_1$ verwendet wird, und es sei $P|_{D \cap Y} = I$. Außerdem sei P beschränkt.

Behauptung:

Dann gilt $||I + P|| = 1 + ||P||$.

Bemerkung 10:

Die Voraussetzungen von Lemma 3 sind z.B. erfüllt, wenn wir

$$P = A_n, \quad t_{j,f} = x_{j,f} \quad (j = 0, 1, \dots, n+1) \text{ gemäß (3), (4),}$$

$$w_{j,f} = l_{j,f} \quad (j = 0, 1, \dots, n+1)$$

und

$$D = D_{n,m} =$$

$$= \left\{ f \in C[-1,1] : \sum_{j=1}^{m-1} 8 \frac{|c_{n+1+j}(f)|}{|c_{n+1}(f)|} < n \wedge |c_{n+1}(f)| \neq 0 \vee f \in \Pi_n \right\}$$

mit einem $m \in \{2,3,\dots\}$ wählen;

denn ist dann $f \in D \setminus \Pi_n$ und $g \in C(I)$, so gilt

$$|c_k(g) - c_k(f)| = |c_k(f-g)| =$$

$$= \left| \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 [f(t) - g(t)] T_k(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right| \leq \|f - g\|_1$$

d.h. wenn $\|f - g\|_1$ hinreichend klein ist,

ist $g \in D$, und $t_{j,f}$ und $w_{j,f}$ hängen stetig von f ab.

Entsprechendes gilt für die Operatoren B_n .

Beweis:

Sei $\epsilon > 0$.

Gibt es ein $y \in Y \cap D$ mit $\|y\| = 1$ und

$$\|y\| = \|p_y\| > \|p\| - \epsilon,$$

so gilt

$$\|(I + P)y\| = 2 \|y\| \geq 1 + \|p\| - \epsilon.$$

Andernfalls sei $g \in D \setminus Y$ mit $||g|| = 1$ und $||p_g|| > ||p|| - \epsilon$.

Wir setzen

$$U := \{t \in I \mid p_g(t) > ||p|| - \epsilon\},$$

was wir o.B.d.A. als nicht leer annehmen können.

Wir wählen nun ein

$$\tau \in U \setminus \{1; -1; t_{1,g}; t_{2,g}; \dots; t_{n+m^*,g}\}$$

und ein $\delta > 0$ so, daß

$$|\tau - t_{i,g}| > 2\delta \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n+m^*,$$

$$-1 < \tau - \delta, \quad \tau + \delta < 1 \quad \text{und}$$

$$|g(t_{i,g}) - g(t)| < \epsilon \quad \text{gilt,}$$

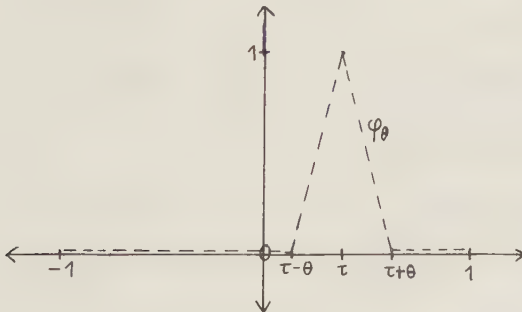
wenn $i \in \{1, \dots, n+m^*\}$ und $|t - t_{i,g}| < \delta$ ist.

Dann bestimmen wir $\varphi_\theta \in C(I)$ so, daß

$$\varphi_\theta(\tau) = 1, \quad |\varphi_\theta(t)| \leq 1 \quad \text{für alle } t \in I \quad \text{und}$$

$$|\varphi_\theta(t)| \leq \theta \quad \text{für alle } t \in I \quad \text{mit } |t - \tau| \geq \theta$$

gilt, d.h. wir wählen φ_θ z.B. wie in der untenstehenden Abbildung.



Dann setzen wir

$$h_{\theta} := \varphi_{\theta} + (1 - \varphi_{\theta}) g \quad ,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |g(t) - h_{\theta}(t)| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_{-1}^1 |[1 - g(t)] \varphi_{\theta}(t)| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \leq \\ &\leq 2 \int_{\tau-\theta}^{\tau+\theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + 2\theta \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \\ &= 2 [\arcsin(\tau+\theta) - \arcsin(\tau-\theta) + \theta\pi] \quad , \end{aligned}$$

d.h. wegen $g \neq 0$ ist $h_{\theta} \in D$ für hinreichend kleines θ , etwa $\theta < \theta_0$.

Aufgrund der Stetigkeit der Zuordnungen $f \rightarrow t_{i,f}$ und $f \rightarrow w_{i,f}$ können wir außerdem $\theta \leq \min\{\theta_0, \epsilon, \delta\}$ so klein wählen, daß

$$||w_{i,g} - w_{i,h_{\theta}}|| < \epsilon$$

und

$$|t_{i,g} - t_{i,h_{\theta}}| < \delta$$

und infolgedessen auch

$$|g(t_{i,g}) - g(t_{i,h_{\theta}})| < \epsilon$$

und

$$|h_{\theta}(t_{i,h_{\theta}}) - g(t_{i,h_{\theta}})| \leq 2\theta$$

für $i = 1, \dots, n+m^*$ gilt.

Damit können wir abschätzen

$$\begin{aligned} & |Pg(t) - Ph_{\theta}(t)| = \\ & = \left| \sum_{i=1}^{n+m^*} [g(t_{i,g}) w_{i,g}(t) - h_{\theta}(t_{i,h_{\theta}}) w_{i,h_{\theta}}(t)] \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^{n+m^*} \left\{ \left[|g(t_{i,g}) - g(t_{i,h_{\theta}})| + |g(t_{i,h_{\theta}}) - h_{\theta}(t_{i,h_{\theta}})| \right] |w_{i,g}(t)| \right. \\ & \quad \left. + |h_{\theta}(t_{i,h_{\theta}})| |w_{i,g}(t) - w_{i,h_{\theta}}(t)| \right\} \\ & \leq (n+m^*)(\epsilon+2\theta) \sup_{i=1, \dots, n+m^*} |w_{i,g}| + (1+||g||)(n+m^*)\epsilon \leq K\epsilon \end{aligned}$$

und erhalten schließlich

$$\begin{aligned} 1 + ||P|| & \geq ||I + P|| \geq (I + P) h_{\theta}(\tau) = \\ & = h_{\theta}(\tau) + Pg(\tau) - (Pg(\tau) - Ph_{\theta}(\tau)) \geq 1 + ||P|| - \epsilon - K\epsilon \end{aligned}$$

und

$$1 + ||P|| = ||I + P||,$$

weil ϵ beliebig war.

Diese Ergebnisse fassen wir zusammen in dem folgenden

Satz 2:

Seien D und Y wie in der Voraussetzung von Lemma 3 und $\mathcal{U}$ eine Familie von semilinearen Abbildungen von D in Y , die die Forderungen an P in der Voraussetzung von Lemma 3 erfüllen.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent

- 1.) Für $P_0 \in \mathcal{U}$ gilt $||P_0|| = \inf_{P \in \mathcal{U}} ||P||$
- 2.) Für $P_0 \in \mathcal{U}$ gilt $||I - P_0|| = \inf_{P \in \mathcal{U}} ||I - P||$
- 3.) Für $P_0 \in \mathcal{U}$ gilt $||M_Y - P_0|| = \inf_{P \in \mathcal{U}} ||M_Y - P||$

Bemerkung 11:

Eine Abbildung P der Form (13) ist semilinear, wenn $Y + D \subset D$ ist und für alle $f \in D$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$t_{i,f} = t_{i,\alpha f} \quad , \quad w_{i,f} = w_{i,\alpha f} \quad \text{für } i = 1, \dots, n+m^*$$

sowie für alle $f \in D$ und $p \in Y$ gilt

$$t_{i,f+p} = t_{i,f} \quad , \quad w_{i,f+p} = w_{i,f} \quad \text{für } i = 1, \dots, n+m^*$$

und

$$\sum_{i=1}^{n+m^*} p(t_{i,f}) w_{i,f} = p \quad ,$$

was ja für die Operatoren A_n und B_n auf $D_{n,m}$ erfüllt ist.

Beweis:

Für $P \in \mathcal{U}$ gilt aufgrund von Lemma 2, Lemma 3 und (12)

$$||P|| = -1 + ||I - P|| \leq$$

$$\leq -1 + ||I - M_Y|| + ||M_Y - P|| \leq ||M_Y - P|| \leq ||P|| \quad .$$

§ 4 Numerische Verfahren und Ergebnisse

a) Beschreibung der Verfahren

Die in §1 und §2 untersuchten Verfahren sowie einige ähnliche Verfahren wurden vom Verfasser programmiert und auf der Rechenanlage CD 3300 des Rechenzentrums der Universität Erlangen-Nürnberg mit einer Reihe von (zu approximierenden) Funktionen getestet. Dabei ging es vor allem darum, bei den Polynomen bester Approximation an den durch die Voriterationsformel aus §1,(2) gewonnenen Punkten die untere Schranke und die maximale Abweichung von der gegebenen Funktion f mit $E_n(f)$ zu vergleichen sowie bei dem Verfahren von Darlington die Norm der Fehlerfunktion mit $E_n(f)$ zu vergleichen.

Zunächst wurden in allen Programmen die benötigten Koeffizienten der (diskreten) Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen mit Hilfe der Integrationsformel aus §2,(20), die ja der Fast Fourier Transform entspricht, berechnet; denn alle behandelten Verfahren sind insofern indirekte Verfahren, als sie noch einige dieser Koeffizienten - nicht nur Funktionswerte - zur Berechnung der Näherungspolynome benötigen.

In dem Programm I wurde dann zu gegebener Funktion f das Polynom bester Approximation vom Grad $\leq n$ an den Punkten

$$x_{k,f}^{(m,n)} = \xi_k - \frac{\tilde{f}'(\xi_k) - p_{n,\tilde{f}}'(\xi_k)}{\tilde{f}''(\xi_k) - p_{n,\tilde{f}}''(\xi_k)} =$$

$$= \xi_k + \frac{2(1-\xi_k^2) \sum_{v=1}^{m-1} c_{n+1+v} U_{v-1}(\xi_k)}{(n+1) c_{n+1} + \sum_{v=1}^{m-1} c_{n+1+v} [4T_v(\xi_k) - 2\xi_k U_{v-1}(\xi_k)]}$$

$$(k = 0, 1, \dots, n+1)$$

(vgl. §1, S.16) mit variablem m und anschließend zum Vergleich die beste Tschebyscheff-Approximation auf dem gesamten Intervall bestimmt. (Hierbei bedeutet

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) T_k(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad .)$$

In diesem Programm lief m von 0 (d.h. $x_{k,f}^{(0,n)} = \xi_k$) bis $\bar{m}$ mit $\bar{m} \leq 2n$, um den Einfluß der verschiedenen Koeffizienten $c_{n+2}, \dots, c_{3n+2}$ auf die Güte der durch $x_{k,f}^{(m,n)}$ ($k = 0, 1, \dots, n+1$) festgelegten Näherung für die beste Tschebyscheff-Approximation auf I untersuchen zu können.

In der Version II dieses Programms wurde zu einer Funktion f das Polynom bester Tschebyscheff-Approximation an Punkten

$$x_{k,\rho} = \xi_k + \rho(1 - \xi_k^2) \quad (k = 0, 1, \dots, n+1)$$

bestimmt, und zwar wurde iterativ (ausgehend von

$$\rho_0 = \frac{2 c_{n+2}}{(n+1) c_{n+1}} \quad)$$

der Parameter ρ^* gesucht, für den der Betrag des linearen Funktionals

$$L_{n,\rho}(f) = \sum_{\mu=0}^{n+1} f(x_{\mu,\rho}) \alpha_{\mu,\rho}$$

maximal wird, wobei die Gewichte α_{μ} wie in §1 zu den Punkten

$$z_k = x_{k,\rho} \quad (k = 0, 1, \dots, n+1)$$

bestimmt werden. Das ist ein Beispiel für den Vergleich von Approximationsverfahren, der in §3c) theoretisch behandelt wurde; hier wurden jedoch als Kriterium für die Güte des Verfahrens keine Operatornormen herangezogen, sondern die Größe $|L_{n,\rho}(f)|$ für eine spezielle Funktion f .

Man kann auch eine gegenüber $\{\xi_k\}_{k=0,1,\dots,n+1}$ verbesserte Ausgangsreferenz bestimmen, ohne die Koeffizienten der Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen zu verwenden, indem man von den Alternantenpunkten der besten Tschebyscheff-Approximation durch Polynome niedrigeren Grades ausgeht. Aufgrund der Gaußschen Quadraturformel zu den Punkten

$$\xi_k = -\cos \frac{k}{n+1} \quad (k = 1, \dots, n)$$

erhält man für die Tschebyscheff-Polynome zweiter Art die diskrete Orthogonalitätsrelation

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n \beta_k^{(n)} U_\ell(\xi_k) U_j(\xi_k) = \frac{\pi}{2} \delta_\ell^j \quad \text{für } j, \ell \in \{0, 1, \dots, n\}$$

mit den Gewichten

$$\beta_k^{(n)} = \frac{-2\pi}{2} \frac{1}{U_{n+1}(\xi_k) U_n'(\xi_k)} = \frac{\pi(1-\xi_k^2)}{n+1}.$$

Wir bezeichnen nun die Punkte einer Alternante von f bei der gleichmäßigen Approximation durch Polynome vom Grad $\leq n$, soweit sie im Inneren des Intervalls $I = [-1, 1]$ liegen, mit $x_{k,f}^*$ ($k = 1, \dots, n$), wobei $x_{k+1,f}^* > x_{k,f}^*$ ($k=1, \dots, n-1$) gelten möge, und bestimmen zu einem $\tilde{m}_n \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

Parameter $\tau_{1,n}, \dots, \tau_{\tilde{m}_n,n}$ aus der Forderung

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n \frac{n+1}{2(1-\xi_j^2)} \left[\sum_{\ell=0}^{\tilde{m}_n} \tau_{\ell,n} U_\ell(\xi_j) \frac{2(1-\xi_j^2)}{n+1} - (x_{j,f}^* - \xi_j) \right]^2$$

$$= \min \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{2(1-\xi_j^2)}{(n+1)} \left[\sum_{\ell=0}^{\tilde{m}_n} \tau_{\ell,n} U_\ell(\xi_j) - \frac{n+1}{2(1-\xi_j^2)} (x_{j,f}^* - \xi_j) \right]^2 \right.$$

$$\left. \left| (\tau_1, \dots, \tau_{\tilde{m}_n}) \in \mathbb{R}^{\tilde{m}_n} \right\} \right\}$$

Wegen (1) ist diese Bedingung erfüllt, wenn

$$\tau_{\ell,n} = \sum_{j=1}^n U_{\ell}(\xi_j) (x_{j,f}^* - \xi_j) \quad (\ell = 0, \dots, \tilde{m}_n)$$

gilt. Analog zu der Voriterationsformel (2) aus §1 setzen wir also

$$(3) \quad x_{j,n} = \xi_j + \sum_{\ell=0}^{\tilde{m}_n} \tau_{\ell,n} U_{\ell}(\xi_j) \frac{2(1-\xi_j^2)}{n+1} \quad (j=1, \dots, n)$$

als Näherung für die $x_{j,f}^*$ ($j = 1, \dots, n$) an, wobei die $\tau_{\ell,n}$ den Größen

$$\frac{c_{n+2+\ell}}{c_{n+1}}$$

entsprechen.

Im Programm III wurden dementsprechend die Werte von τ_{ℓ,n_i} für gewisse (niedrige) Grade $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ aus den Alternantenpunkten des Polynoms von bester gleichmäßiger Approximation mit dem Grad $\leq n_i$ numerisch bestimmt, wobei ℓ von 0 bis $\tilde{m}_{n_i}$ lief. Daraus wurden durch gewichtete Mittelung gewisse Näherungswerte $\tilde{\tau}_{\ell,N}$ ($\ell = 0, 1, \dots, \tilde{M}$) für die in (2) bei der Approximation durch Polynome vom Grad N auftretenden Koeffizienten $\tau_{\ell,N}$ berechnet gemäß der Gleichung

$$\tilde{\zeta}_{\ell, N} = \sum_{i=1}^r \zeta_{\ell, n_i} w_{i, \ell} \quad ,$$

wobei für $\ell > \tilde{m}_{n_1}$ $\zeta_{\ell, n_i} = 0$ gesetzt wurde und die $w_{i, \ell}$ irgendwelche nichtnegativen Zahlen mit $w_{i, \ell} = 0$ für $n_i \leq \ell$ und

$$\sum_{i=1}^r w_{i, \ell} = 1 \quad (\ell = 0, 1, \dots, \tilde{M})$$

sind. Damit erhält man als Ausgangsreferenz für die Polynomapproximation vom Grad N die Punkte

$$(4) \quad \tilde{x}_{j, N} = \xi_j + 2 \sum_{\ell=0}^{\tilde{M}} \tilde{\zeta}_{\ell, N} U_{\ell}(\xi_j) \frac{1 - \xi_j^2}{N+1}$$

$$(j = 0, 1, \dots, N+1).$$

Dieses Vorgehen ist insbesondere gerechtfertigt in dem Fall, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} =: S$$

existiert mit $|S| < 1$, dann gilt nämlich (für festes $\tilde{M}$)

$$\phi_n(x) := x + 2 \sum_{\ell=0}^{\tilde{M}} \frac{c_{N+2+\ell}}{c_{N+1}} U_\ell(x) \frac{1-x^2}{N+1} =$$

$$= x + 2 \sum_{\ell=0}^{\tilde{M}} S^{\ell+1} U_\ell(x) \frac{1-x^2}{N+1} + o\left(\frac{1}{N+1}\right)$$

gleichmäßig in $[-1,1]$, und die Punkte

$\phi_N(\xi_j)$ ($j = 0, \dots, N+1$) und ebenso die Punkte

$x_{j,N}$ aus (3) sind Näherungen für die Alternantenpunkte

$x_{j,f}^*$ bei der Polynomapproximation vom Grad N . Man kann

also annehmen, daß die Punkte $\tilde{x}_{j,N}$ aus (4) eine gute

Näherung an die Alternantenpunkte darstellen - wenn

$n_1, \dots, n_r$ so groß sind, daß sich die Werte

$$\frac{c_{n_i+\ell+2}}{c_{n_i+1}} \quad (\ell = 0, 1, \dots, \tilde{m}_i; \quad i = 1, \dots, r)$$

nur "wenig" von $S^{\ell+1}$ unterscheiden.

Ein weiteres Verfahren, zu dem wie zu III keine theoretischen Aussagen über die Güte der Näherung aufgestellt werden konnten, ergibt sich aus der Störungsrechnung von Hornecker [60].

Wir gehen dazu aus von

$$\tilde{f} = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k T_k \quad \text{und}$$

führen "gestörte" Funktionen $\tilde{f}_\lambda$ mit

$$\tilde{f}_\lambda = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^{k-n-1} c_k T_k$$

ein. Wir nehmen an, daß das Polynom $P_{n,\lambda}$ bester gleichmäßiger Approximation vom Höchstgrad n an $\tilde{f}_\lambda$ sich darstellen läßt als

$$P_{n,\lambda} = \sum_{v=0}^n \sum_{j=1}^{\infty} a_{vj} \lambda^j T_j$$

und die Alternantenpunkte $x_{j,\lambda}^*$ von $\tilde{f}_\lambda - P_{n,\lambda}$ als

$$x_{j,\lambda} = \cos \left(\theta_j + \sum_{q=1}^{\infty} d_{q,j} \lambda^q \right) \quad (j = 0, 1, \dots, n+1)$$

mit $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1}$ sowie die Minimalabweichung als

$$\operatorname{sgn}(c_{n+1}) ||\tilde{f}_\lambda - P_{n,\lambda}|| = \rho_{n,\lambda} = c_{n+1} + \sum_{j=1}^{\infty} r_j \lambda^j$$

Daraus ergeben sich die folgenden Gleichungen (s. Hornecker [60], S. 196)

$$\sum_{v=0}^n \left\langle \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{vj} \lambda^j \right) \sum_{p=0}^{\infty} \left[\frac{1}{p!} \left(\sum_{q=1}^{\infty} \lambda^q d_{q,k} \right)^p (\cos v\theta)^{(p)} \right]_{\theta=\theta_k} \right\rangle +$$

$$+ (-1)^k \left(c_{n+1} + \sum_{j=1}^{\infty} r_j \lambda^j \right) =$$

$$= p_{n,\lambda}(x_{k,\lambda}^*) + (-1)^k p_{n,\lambda} = \tilde{f}_{\lambda}(x_{k,\lambda}^*) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \left\langle \lambda^s c_{n+1+s} \sum_{p=0}^{\infty} \left[\frac{1}{p!} \left(\sum_{q=1}^{\infty} d_{q,k} \lambda^q \right)^p (\cos(n+1+s)\theta)^{(p)} \right]_{\theta=\theta_k} \right\rangle$$

für $k = 0, 1, \dots, n+1$,

$$\sum_{v=0}^n \left\langle \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{vj} \lambda^j \right) \sum_{p=0}^{\infty} \left[\frac{1}{p!} \left(\sum_{q=1}^{\infty} d_{q,k} \lambda^q \right)^p (\cos v\theta)^{(p+1)} \right]_{\theta=\theta_k} \right\rangle =$$

$$= p'_{n,\lambda}(x_{k,\lambda}^*) = \tilde{f}'_{\lambda}(x_{k,\lambda}^*) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \left\langle \lambda^s c_{n+1+s} \sum_{p=0}^{\infty} \left[\frac{1}{p!} \left(\sum_{q=1}^{\infty} d_{q,k} \lambda^q \right)^p (\cos(n+1+s)\theta)^{(p+1)} \right]_{\theta=\theta_k} \right\rangle$$

für $k = 1, \dots, n$.

Wir führen noch die Größen $g_{s,p,k}$ ein, für die

$$\left(\sum_{q=1}^{\infty} d_{q,k} \lambda^q \right)^p = \sum_{s=0}^{\infty} g_{s,p,k} \lambda^{s+p}$$

gilt und die sich im Fall $c_{n+2} \neq 0$ berechnen lassen durch

$$g_{0,p,k} = d_{1,k}^p$$

$$g_{s,p,k} = \frac{1}{s d_{1,k}} \sum_{t=1}^s (t(p+1)-s) d_{t+1,k} g_{s-t,p,k} \quad (s \in \mathbb{N})$$

(s. z.B. Gradshteyn - Ryzhik [65], S.14) .

Nun können wir in den obigen Gleichungen die Koeffizienten von $\lambda^{\bar{l}}$ ($\bar{l} = 1, \dots, \bar{l}$ mit $\bar{l} \leq n$) vergleichen und erhalten nach einiger Rechnung unter den Voraussetzungen $c_{n+1} \neq 0$, $c_{n+2} \neq 0$ und $d_{l,0} = d_{l,n+1} = 0$ für $l \in \mathbb{N}$

$$a_{v,1} = 0 \quad \text{für } v = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$a_{n,1} = c_{n+2}$$

$$r_1 = 0$$

$$d_{1,k} = -\frac{2}{n+1} \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} \sin \theta_k$$

sowie für $l = 2, \dots, \bar{l}$

$$a_{v,l} = 0 \quad (v = 0, 1, \dots, n-l)$$

$$a_{v,l} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} // \cos v \theta_k \left[- \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{\mu=n-j+1}^n a_{\mu,j} \sum_{\kappa=1}^{l-j} \frac{(\cos \mu \theta)^{(\kappa)}}{\kappa!} \right]_{\theta=\theta_k} \cdot g_{l-j-\kappa, \kappa, k}^+$$

$$+ \sum_{s=0}^{l-1} c_{n+1+s} \sum_{\mu=1}^{l-s} \frac{[\cos(n+1+s)\theta]^{(\mu)}}{\mu!} \Big|_{\theta=\theta_k} g_{l-s-\mu, \mu, k}^+ +$$

$$+ c_{n+1+l} \cos[(n+1+l)\theta_k] \Big]$$

für $v = n-l+1, n-l+2, \dots, n$

$$r_l = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} // (-1)^k \left[- \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{\mu=n-j+1}^n a_{\mu,j} \sum_{\kappa=1}^{l-j} \frac{(\cos \mu \theta)^{(\kappa)}}{\kappa!} \right]_{\theta=\theta_k} \cdot g_{l-j-\kappa, \kappa, k}^+$$

$$+ \sum_{s=0}^{l-1} c_{n+1+s} \sum_{\mu=1}^{l-s} \frac{[\cos(n+1+s)\theta]^{(\mu)}}{\mu!} \Big|_{\theta=\theta_k} g_{l-s-\mu, \mu, k}^+ +$$

$$+ c_{n+1+l} \cos[(n+1+l)\theta_k] \Big]$$

$$g_{\ell-1,1,k} = d_{\ell,k} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{c_{n+1} (n+1)^2} \left[- \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{v=n-j+1}^n a_{vj} \sum_{\kappa=1}^{\ell-j} \frac{(\cos v\theta)^{(\kappa+1)}}{\kappa!} \right]_{\theta=\theta_k} \cdot$$

$$\cdot g_{\ell-j-\kappa,\kappa,k} +$$

$$+ \sum_{v=n-\ell+1}^n a_{v\ell} \sin v \theta_k +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\ell-1} c_{n+1+s} \sum_{\mu=1}^{\ell-s} \frac{[\cos(n+1+s)\theta]^{(\mu+1)}}{\mu!} \Big|_{\theta=\theta_k} g_{\ell-s-\mu,\mu,k} -$$

$$- (n+1+\ell) c_{n+1+\ell} \sin[(n+1+\ell)\theta_k] +$$

$$+ c_{n+1} \sum_{\mu=2}^{\ell} \frac{[\cos(n+1)\theta]^{(\mu+1)}}{\mu!} \Big|_{\theta=\theta_k} g_{\ell-\mu,\mu,k} \Big]$$

für $k = 1, \dots, n$.

In Programm IV wurden als Näherungen an eine gegebene Funktion

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k$$

die Polynome

$$\hat{p}_{n,\ell} = \sum_{j=0}^n (c_j + \sum_{\mu=1}^{\ell} a_{j,\mu}) T_j$$

für $\ell = 1, \dots, \bar{\ell}$ gewählt sowie die Polynome $\hat{p}_{n,\ell}$ vom Grad n , deren maximale Abweichung von f in den Punkten

$$\hat{x}_{j,\ell} := \cos\left(\theta_j + \sum_{q=1}^{\ell} d_{q,j}\right) \quad (j = 0, 1, \dots, n+1)$$

minimal ist, wobei ℓ zwischen 1 und $\bar{\ell}$ lief.

Als Programm V wurde schließlich das in §2 beschriebene Verfahren von Darlington bezeichnet. Zur Berechnung des betragsmaximalen Eigenwerts und des zugehörigen Eigenvektors wurde die Potenzmethode bzw. ein fertiges Unterprogramm, das auf der Jacobi - Methode beruht, verwendet.

b) Numerische Ergebnisse

Die mit I bis V bezeichneten Programme wurden, um die Ergebnisse vergleichen zu können, an denselben Funktionen getestet. Es wurden u.a. gewählt

e^t und $0,0001 \cdot e^{10 \cdot t}$ als Beispiele für ganze Funktionen,

$\sqrt{t+1,1}$, $-(t-2)^{-1}$, $-0,1 \cdot (t-1,1)^{-1}$ als Beispiele für in einer Umgebung von $[-1,1]$ holomorphe, nicht ganze Funktionen

und $(\arccos t)^2$ als Beispiel einer nicht überall differenzierbaren Funktion.

Da die Koeffizienten der Entwicklungen dieser Funktionen nach Tschebyscheff-Polynomen monoton fallen, wurden zur "Kontrolle" noch die Funktionen

$\sin(\pi t) + \frac{0,1}{t-2}$ und $|t + \frac{1}{2}|^3$ verwendet.

Zur Untermuerung von asymptotischen Aussagen, wie sie in §1 und §2 gemacht werden, können numerische Ergebnisse wie die vorliegenden nur beschränkt dienen, da zur Vermeidung numerischer Instabilitäten in der Regel Polynomgrade ≤ 20 (außer beim Verfahren von Darlington) gewählt wurden und außerdem z.B.

$E_8(e^t) \approx 1,11 \cdot 10^{-8}$ und

$E_{13}\left(\frac{-1}{t-2}\right) \approx 1,22 \cdot 10^{-8}$ ist, sodaß bei einer Rechnung mit 10 gültigen Stellen eine Verwendung von Polynomen höherer Grade

hier nicht sinnvoll ist. Da insgesamt etwa tausend Näherungspolynome berechnet wurden, können im wesentlichen nur die Erscheinungen dargestellt werden, die allgemein (d.h. für viele Funktionen und Polynomgrade) auftreten.

Zu I)

Wir bezeichnen mit $L_{n,f}^{(m)}$ das in §1, S.26 definierte Funktional zu den Punkten

$$z_k = x_{k,f}^{(m,n)} \quad (k = 0, 1, \dots, n+1) \quad ,$$

mit $P_{n,m,f}$ das Polynom höchsten n -ten Grades mit minimaler Maximalabweichung von f in den Punkten

$$x_{k,f}^{(m,n)} \quad (k = 0, 1, \dots, n+1) \quad ,$$

und wir setzen

$$\Delta_{n,m}(f) := \frac{||f - P_{n,m,f}|| - |L_{n,f}^{(m)}(f)|}{|L_{n,f}^{(m)}(f)|} \quad .$$

Bei den untersuchten in $[-1, 1]$ reell-analytischen Funktionen mit betragsmäßig monoton fallender Koeffizientenfolge wie

$$e^t, \quad 0,0001 e^{10t}, \quad \sqrt{t+1}, \quad -(t-2)^{-1}, \quad -0,1 \cdot (t-1,1)^{-1}$$

ist bei fast allen Graden $n \leq 10$

$$\Delta_{n,2}(f) < \frac{1}{10} \Delta_{n,0}(f) \quad ,$$

während in einigen Fällen sogar

$$\Delta_{n,2}(f) < 10^{-5} \Delta_{n,0}(f)$$

gilt, z.B. bei e^t für $n = 3, 4$ (siehe Tabelle 1) .

Für diese Funktionen liefert also schon die Verwendung von zwei Koeffizienten in der Voriterationsformel, d.h. die Approximation an den $x_{k,f}^{(2,n)}$, so gut wie sicher eine wesentlich bessere Annäherung an die Funktion als die Approximation an den Tschebyscheff-Knoten ξ_k .

Bei höheren Graden bzw. bei nicht reell-analytischen Funktionen mit betragsmäßig monoton fallender Koeffizientenfolge wie $(\arccos t)^2$ ergibt sich ebenfalls

$$\Delta_{n,2}(f) < \Delta_{n,0}(f) ,$$

wenn auch die Abnahme nicht so groß ist (analog bei $|t|^3$ s. Tabelle 1) .

Bei den untersuchten reell-analytischen Funktionen mit monoton fallender Koeffizientenfolge ist für kleine n (etwa $n \leq 10$)

$$|L_{n,f}^{(2)}(f)| > |L_{n,f}^{(3)}(f)|$$

während von einem gewissen n ab in der Regel

$$|L_{n,f}^{(2)}(f)| < |L_{n,f}^{(3)}(f)| ,$$

aber auch in diesen Fällen vielfach

$$||f - P_{n,2,f}|| < ||f - P_{n,3,f}||$$

gilt.

Daher ist nicht von vornherein zu entscheiden, wieviel Koeffizienten man in der Voriterationsformel verwenden sollte; für $m = 3, 4, \dots$ allerdings stimmen die Werte von $|L_{n,f}^{(m)}(f)|$ oft im wesentlichen überein.

Für die Funktionen $|t|$ und $|t|^3$, bei denen die Koeffizienten c_{2k} ($k \in \mathbb{N}$) eine monoton fallende Folge bilden, gilt bei allen untersuchten Graden (ungerades $n < 20$)

$$\Delta_{n,3}(f) < \Delta_{n,0}(f) \quad ,$$

und bei der Funktion $|t|$ findet man für $n = 5$ eines der wenigen Beispiele, in denen $f - P_{n,3,f}$ nicht innerhalb der Zeichengenauigkeit mit der Fehlerfunktion der entsprechenden besten gleichmäßigen Approximation $P_{n,f}^4$ übereinstimmt (s. Figur 1 u. Tabellen 1,2).

Bei Funktionen, deren Koeffizientenfolge nicht monoton fällt, erhält man dagegen keine einheitlichen Ergebnisse.

Für $\sin(\pi t) + \frac{0,1}{t-2}$ bringt bei geradem Grad ≤ 10 der Übergang von $m = 0$ zu $m = 2$ keine wesentliche Verbesserung, während beim Übergang von $m = 2$ zu $m = 3$ eine starke Verbesserung und von da ab keine wesentliche Änderung stattfindet; bei ungeradem Grad n , also im Fall

$|c_{n+1}| < |c_{n+2}|$, liegen die aufgrund der Voriterationsformel definierten Punkte $x_{k,f}^{(m,n)}$ fast alle außerhalb $[-1,1]$.

Bei den Funktionen $|t + 0,5|^3$ und $|t + 0,5|$ liegen entsprechend der Unregelmäßigkeit in der Koeffizientenfolge die Werte von

$$|L_{n,f}^{(m)}(f)| \quad \text{bzw.} \quad ||f - P_{n,m,f}||$$

für aufeinanderfolgende m ganz verschieden zueinander.

Entsprechend der in §1 gemachten Voraussetzungen für die Aussage

$$|L_{n,f}^{(m)}(f)| > |L_{n,0}(f)|$$

ist die Bedingung

$$(6) \quad |c_{n+1}| > |c_{n+2}| > |c_{n+3}| > \dots > |c_{n+m}|$$

wesentlich dafür, daß die aus der Voriterationsformel gewonnenen Punkte eine bessere Näherung als die Tschebyscheff-Knoten ξ_k liefern; während unter der Voraussetzung (6) die "Regularität" der Funktion (Differenzierbarkeit, Holomorphie, Ganzheit) maßgeblich ist für den Grad der Annäherung von

$$|L_{n,f}^{(m)}(f)| \quad \text{und} \quad ||f - P_{n,m,f}|| \quad \sim \text{an} \quad E_n(f) \quad \text{bei} \\ \text{beliebigem } m.$$

Als Ausgangsreferenz für den Remez-Algorithmus sollte man also im Fall

$$|c_{n+2}| < |c_{n+1}| \quad \text{die Punkte} \quad x_{k,f}^{(2,n)} \quad (k = 0, 1, \dots, n+1)$$

bzw. bei geraden oder ungeraden Funktionen im Fall

$|c_{n+3}| < |c_{n+1}|$ die Punkte $x_{k,f}^{(3,n)}$ und im Fall

$|c_{n+2}| \geq |c_{n+1}|$ die Tschebyscheff-Knoten ξ_k wählen.

Bei hinreichend kleinem Grad, hinreichend "regulärer"

Funktion bzw. hinreichend kleiner Anforderung an die

Genauigkeit (s. Tabellen 1 u. 2) kann man $P_{n,2,f}$

anstelle des entsprechenden Polynoms bester Approximation

verwenden; in vielen Fällen konvergiert außerdem das

Newton-Verfahren zur Bestimmung der besten Approximation

mit den Punkten $x_{k,f}^{(2,n)}$ als Ausgangsreferenz, während

es mit den Tschebyscheff-Knoten ξ_k als Ausgangsreferenz

nicht konvergiert.

Tabelle 1 (zu Verfahren I)

a) $f(t) = e^t$

n	$\Delta_{n,0}(f)$	$\Delta_{n,2}(f)$	$\Delta_{n,3}(f)$
1	$5,438 \cdot 10^{-2}$	$7,349 \cdot 10^{-6}$	$7,349 \cdot 10^{-6}$
2	$2,552 \cdot 10^{-2}$	$2,010 \cdot 10^{-5}$	$1,874 \cdot 10^{-4}$
3	$1,952 \cdot 10^{-2}$	$6,589 \cdot 10^{-8}$	$8,671 \cdot 10^{-5}$
4	$1,319 \cdot 10^{-2}$	$1,872 \cdot 10^{-7}$	$2,844 \cdot 10^{-5}$
5	$1,005 \cdot 10^{-2}$	$7,087 \cdot 10^{-6}$	$1,458 \cdot 10^{-5}$
6	$7,672 \cdot 10^{-3}$	$2,519 \cdot 10^{-5}$	$1,060 \cdot 10^{-4}$
7	$6,216 \cdot 10^{-3}$	$3,429 \cdot 10^{-3}$	$6,023 \cdot 10^{-4}$

b) $f(t) = -(t-2)^{-1}$

2	$1,428 \cdot 10^{-1}$	$\approx 1,254 \cdot 10^{-9}$	$4,411 \cdot 10^{-3}$
4	$1,527 \cdot 10^{-1}$	$6,150 \cdot 10^{-4}$	$3,977 \cdot 10^{-3}$
6	$1,462 \cdot 10^{-1}$	$1,036 \cdot 10^{-3}$	$3,320 \cdot 10^{-3}$
8	$1,540 \cdot 10^{-1}$	$1,656 \cdot 10^{-3}$	$3,409 \cdot 10^{-3}$
10	$1,543 \cdot 10^{-1}$	$1,872 \cdot 10^{-3}$	$3,485 \cdot 10^{-3}$
12	$1,525 \cdot 10^{-1}$	$7,477 \cdot 10^{-3}$	$4,625 \cdot 10^{-3}$

c) $f(t) = -0,1 (t-1,1)^{-1}$

2	1,232	0	$6,287 \cdot 10^{-1}$
4	1,396	$4,935 \cdot 10^{-2}$	$3,801 \cdot 10^{-1}$
6	1,271	$8,950 \cdot 10^{-2}$	$1,385 \cdot 10^{-1}$
8	1,317	$9,988 \cdot 10^{-2}$	$1,424 \cdot 10^{-1}$
10	1,393	$1,175 \cdot 10^{-1}$	$1,461 \cdot 10^{-1}$
12	1,364	$1,372 \cdot 10^{-1}$	$1,447 \cdot 10^{-1}$
16	1,384	$1,475 \cdot 10^{-1}$	$1,581 \cdot 10^{-1}$
20	2,115	3,450	6,795

Tabelle 1 (zu Verfahren I)

d) $f(t) = \sin \pi t + \frac{0,1}{t-2}$

n	$\Delta_{n,0}(f)$	$\Delta_{n,2}(f)$	$\Delta_{n,3}(f)$
2	$3,398 \cdot 10^{-2}$	$3,375 \cdot 10^{-2}$	$4,110 \cdot 10^{-4}$
4	$7,797 \cdot 10^{-3}$	$7,737 \cdot 10^{-3}$	$6,503 \cdot 10^{-6}$
6	$2,594 \cdot 10^{-3}$	$2,542 \cdot 10^{-3}$	$3,21 \cdot 10^{-7}$
8	$1,142 \cdot 10^{-3}$	$1,088 \cdot 10^{-3}$	$1,003 \cdot 10^{-6}$
10	$6,640 \cdot 10^{-4}$	$5,486 \cdot 10^{-4}$	$1,551 \cdot 10^{-5}$

e) $f(t) = |t|^3$

n	$\Delta_{n,0}(f)$	$\Delta_{n,3}(f)$	$\Delta_{n,5}(f)$
3	$2,324 \cdot 10^{-2}$	$1,408 \cdot 10^{-4}$	$3,464 \cdot 10^{-5}$
5	$1,835 \cdot 10^{-1}$	$2,105 \cdot 10^{-2}$	$1,611 \cdot 10^{-3}$
7	$4,064 \cdot 10^{-1}$	$7,483 \cdot 10^{-2}$	$2,012 \cdot 10^{-2}$
9	$6,516 \cdot 10^{-1}$	$1,434 \cdot 10^{-1}$	$4,659 \cdot 10^{-2}$
15	1,434	$3,765 \cdot 10^{-1}$	$1,410 \cdot 10^{-1}$

f) $f(t) = |t+0,5|^3$

n	$\Delta_{n,0}(f)$	$\Delta_{n,2}(f)$	$\Delta_{n,3}(f)$
1	$1,352 \cdot 10^{-1}$	$1,092 \cdot 10^{-3}$	$1,092 \cdot 10^{-3}$
2	$4,726 \cdot 10^{-2}$	$1,068 \cdot 10^{-2}$	$2,632 \cdot 10^{-3}$
3	$5,096 \cdot 10^{-1}$	$7,821 \cdot 10^{-2}$	$3,338 \cdot 10^{-1}$
4	$3,228 \cdot 10^{-1}$	$9,928 \cdot 10^{-2}$	$6,336 \cdot 10^{-2}$
5	$3,643 \cdot 10^{-1}$	$3,643 \cdot 10^{-1}$	$1,026 \cdot 10^{-1}$
6	197,2	—	—
7	1,376	$7,796 \cdot 10^{-1}$	$6,106 \cdot 10^{-1}$
8	$7,810 \cdot 10^{-1}$	$9,347 \cdot 10^{-1}$	$3,041 \cdot 10^{-1}$

(In den mit — bezeichneten Fällen liegen die Referenzpunkte $x_{k,f}^{(m,n)}$ nicht in der richtigen Reihenfolge)

Tabelle 2 (zu Verfahren I)

$$f(t) = |t|$$

n	$ L_{n,0}(f) $	$ L_{n,f}^{(3)}(f) $	$ L_{n,f}^{(5)}(f) $	$E_n(f)$	$\ f-P_{n,5,f}\ $	$\ f-P_{n,3,f}\ $	$\ f-P_{n,0,f}\ $
3	0,103553	0,121584	0,061957	0,125000	0,188043	0,128416	0,146447
5	0,044658	0,059893	0,067504	0,067621	0,068323	0,077028	0,093570
7	0,024864	0,037080	0,021046	0,045929	0,156945	0,057118	0,070173
9	0,015838	0,025677	0,026656		0,043960	0,046082	0,056451
11	0,010971	0,019019	0,020506		0,061791	0,038922	0,047316
13	0,008048	0,014738	0,016956		0,032166	0,033842	0,040763
15	0,006156	0,011798	0,014198		0,033208	0,030021	0,035822

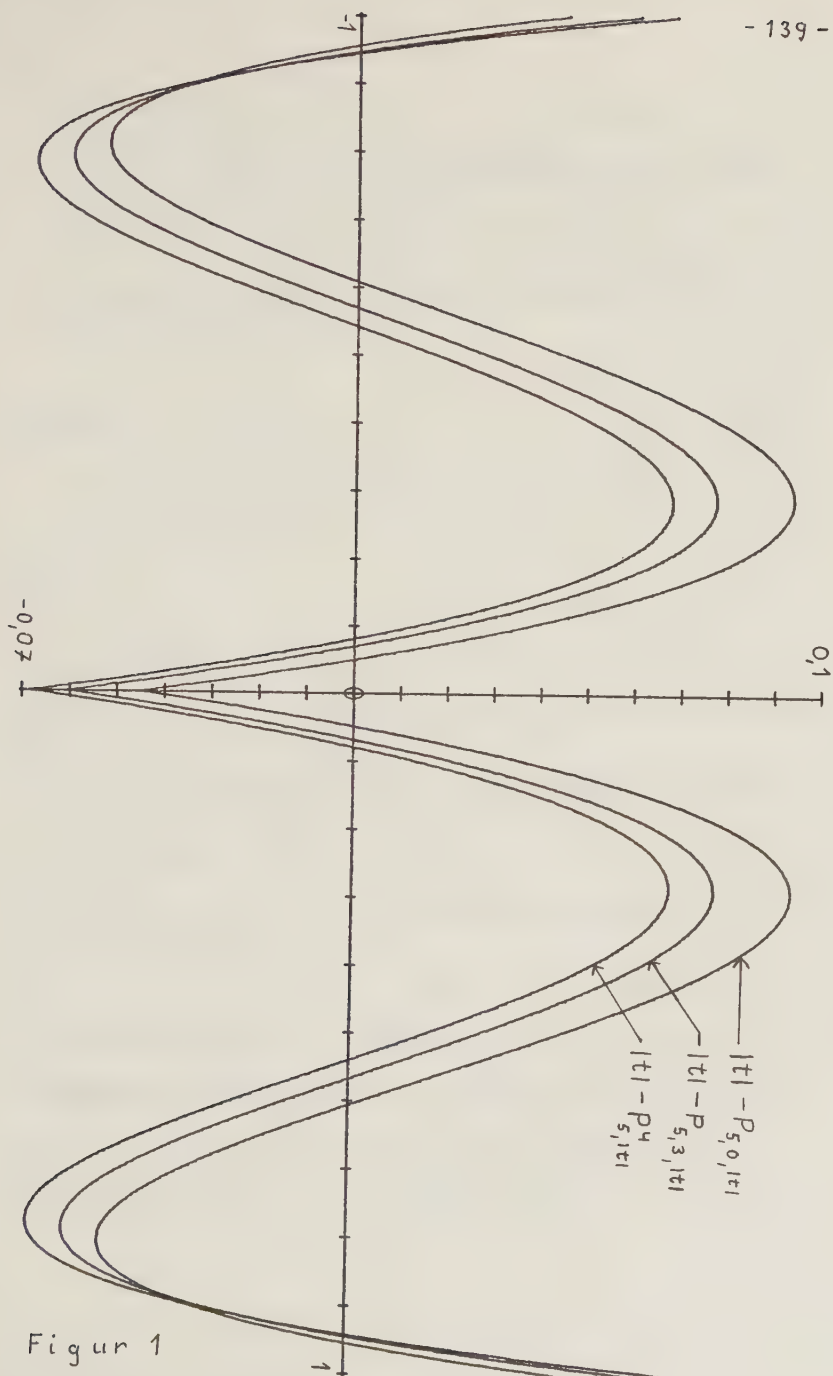


Figure 1

Zu II)

Bei der Suche nach dem Wert ρ^* mit maximalem $|L_{n,\rho}(f)|$ ergibt sich, daß dieser Wert bei Funktionen mit betragsmäßig monoton fallender Koeffizientenfolge in der Regel um so näher an dem entsprechenden ρ_0 liegt, je kleiner

$$\left| \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} \right| \quad \text{ist.}$$

Bei den Funktionen e^t und $-(t-2)^{-1}$ gilt für die Grade $n = 1, 2, \dots, 7$ bzw. $n = 3, 4, \dots, 11$

$$\left| \frac{\rho^* - \rho_0}{\rho_0} \right| \leq 0,0382 \quad ,$$

aber auch hier treten Fälle auf, in denen

$$\frac{E_n(f) - |L_{n,\rho^*}(f)|}{E_n(f)} \approx 0,8 \frac{E_n(f) - |L_{n,\rho_0}(f)|}{E_n(f)}$$

ist, und in einigen Fällen gilt

$$||f - p_{n,f}^{\rho^*}|| > ||f - p_{n,f}^{\rho_0}|| \quad ,$$

wobei wir mit $p_{n,f}^{\rho}$ das Polynom vom Grad $\leq n$ bezeichnen, das von f in den Punkten $x_{k,\rho}$ am wenigsten abweicht, und

$$\Delta_n^*(f) = \frac{||f - p_{n,f}^{\rho^*}|| - |L_{n,\rho^*}(f)|}{|L_{n,\rho^*}(f)|} \quad \text{setzen .}$$

Bei den Funktionen $0,0001 \cdot e^{10 t}$, $0,1 \cdot (t-1,1)^{-1}$
und $\sqrt{t+1,1}$ ist für gewisse Polynomgrade

$$\left| \frac{\rho^* - \rho_0}{\rho_0} \right| > 0,1 \quad \text{und}$$

$$\frac{E_n(f) - |L_{n,\rho^*}(f)|}{E_n(f)}$$

ungefähr halb so groß wie

$$\frac{E_n(f) - |L_{n,\rho_0}(f)|}{E_n(f)}$$

sowie

$$||f - p_{n,f}^{\rho^*}|| > ||f - p_{n,f}^{\rho_0}||.$$

Bei den Funktionen $(\arccos t)^2$ und $\left|t + \frac{1}{2}\right|^3$
zeigen sich diese Erscheinungen - in den Fällen, in denen
 ρ^* überhaupt bestimmt werden konnte - noch deutlicher:
 ρ^* unterscheidet sich von ρ_0 um einen Faktor bis zur
Größenordnung 10 (in wenigen Fällen noch darüber),
und in einigen Fällen ist

$$||f - p_{n,f}^{\rho^*}|| \approx 5 ||f - p_{n,f}^{\rho_0}||.$$

Insgesamt ergibt sich, daß ρ^* von ρ_0 mehr oder
weniger stark abweichen kann, ein besserer Wert für ρ
von vornherein jedoch nicht angegeben werden kann.

Tabelle 3 (zu Verfahren II)

a) $f(t) = \frac{-1}{t-2}$ $\rho_0 = 0,535898$

n	ρ^*	$ L_{n,\rho_0}(f) $	$ L_{n,\rho^*}(f) $	$E_n(f)$	$\Delta_n^*(f)$
4	0,548646	$1,717822 \cdot 10^{-3}$	$1,717893 \cdot 10^{-3}$	$1,718259 \cdot 10^{-3}$	$4,103 \cdot 10^{-4}$
6	0,552459	$1,233027 \cdot 10^{-4}$	$1,233109 \cdot 10^{-4}$	$1,233654 \cdot 10^{-4}$	$1,091 \cdot 10^{-3}$
8	0,554756	$8,851192 \cdot 10^{-6}$	$8,851874 \cdot 10^{-6}$	$8,857239 \cdot 10^{-6}$	$1,447 \cdot 10^{-3}$
10	0,556327	$6,354291 \cdot 10^{-7}$	$6,354811 \cdot 10^{-7}$	$6,359211 \cdot 10^{-7}$	$1,952 \cdot 10^{-3}$

b) $f(t) = \frac{-0,1}{t-1,1}$ $\rho_0 = 1,283484$

n	ρ^*	$ L_{n,\rho_0}(f) $	$ L_{n,\rho^*}(f) $	$E_n(f)$	$\Delta_n^*(f)$
4	1,490328	$7,915539 \cdot 10^{-2}$	$8,017716 \cdot 10^{-2}$	$8,076456 \cdot 10^{-2}$	$3,201 \cdot 10^{-2}$
6	1,587071	$3,202031 \cdot 10^{-2}$	$3,265236 \cdot 10^{-2}$	$3,326176 \cdot 10^{-2}$	$7,068 \cdot 10^{-2}$
8	1,630340	$1,305397 \cdot 10^{-2}$	$1,333875 \cdot 10^{-2}$	$1,369830 \cdot 10^{-2}$	$1,090 \cdot 10^{-1}$
10	1,655941	$5,341861 \cdot 10^{-3}$	$5,461968 \cdot 10^{-3}$	$5,641418 \cdot 10^{-3}$	$1,307 \cdot 10^{-1}$

(Das Verfahren zur Bestimmung von ρ^* konvergiert für beide Funktionen bei $n = 2$ nicht.)

Zu III)

In den gerechneten Beispielen wurde (außer bei geraden Funktionen)

$$n_1 = 1, \dots, n_r = r, N = r+1,$$

$$\frac{w_{i,l}}{w_{i+1,l}} = \frac{i}{i+1} \quad \text{für } l = 1, \dots, \tilde{m}_i, \quad i = 1, \dots, r,$$

$$\tilde{m}_1 = \min(\tilde{M}, i-1) \quad \text{für } i = 1, \dots, r$$

sowie $\tilde{M} \in \{1, 2, 4\}$ gewählt.

Die Alternantenpunkte $x_{k,f}^*$ wurden - soweit möglich - mit Hilfe des Newton-Verfahrens (entsprechend Meinardus [67], S. 113 ff.) bestimmt. Wenn dieses Verfahren nicht konvergierte, wurde

$$\zeta_{0,n} = \dots = \zeta_{\tilde{m}_n,n} = 0$$

gesetzt.

Wir bezeichnen im folgenden das gemäß §1, S.26 zu den Punkten $\tilde{x}_{k,N}$ ($k = 0, 1, \dots, N+1$) bei gegebenem $\tilde{M}$ gebildete Funktional mit $\tilde{L}_{N,\tilde{M}}$ und das Polynom bester Approximation an den $\tilde{x}_{k,N}$ mit $\tilde{P}_{N,\tilde{M},f}$ und setzen

$$\tilde{\Delta}_{N,\tilde{M}}(f) := \frac{||f - \tilde{P}_{N,\tilde{M},f}|| - |\tilde{L}_{N,\tilde{M}}(f)|}{|\tilde{L}_{N,\tilde{M}}(f)|}$$

Auf die Funktionen $|t|^3$, e^t , $\sin \pi t + 0,1 \cdot (t-2)^{-1}$, $\sqrt{t+1,1}$ und $-(t-2)^{-1}$

konnte das Verfahren III (z.T. nur für geraden bzw. ungeraden Grad) angewandt werden. Es ergibt sich in der Regel eine Verkleinerung von $\hat{\Delta}_{N,M}$ ($M = 1,2,4$)

gegenüber $\Delta_{N,0}(f)$, wenn auch in unterschiedlichem Ausmaß:

Für $|t|^3$ ist $\hat{\Delta}_{N,2}(f)$ und $\hat{\Delta}_{N,4}(f)$ nicht wesentlich kleiner als $\Delta_{N,0}(f)$,

bei e^t ist $\hat{\Delta}_{N,1}(f)$, $\hat{\Delta}_{N,2}(f)$ und $\hat{\Delta}_{N,4}(f)$ nicht viel größer als $\Delta_{N,2}(f)$,

und bei $\sin \pi t + 0,1 (t-2)^{-1}$ ist $\hat{\Delta}_{N,2}(f)$ ebenso wie $\hat{\Delta}_{N,4}(f)$ nicht viel größer als $\Delta_{N,3}(f)$.

"Wirkt" sich dagegen die Existenz von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$$

bei den benutzten Polynomgraden "aus", so wird

$\hat{\Delta}_{N,M}(f)$ im allgemeinen kleiner als $\Delta_{N,2}(f)$, und zwar sind

$\hat{\Delta}_{N,M}\left(\frac{-1}{t-2}\right)$ für $M = 1,2,4$ und $N = 3,4,\dots,12$

nur etwa $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{5}$ so groß wie $\Delta_{N,2}\left(\frac{-1}{t-2}\right)$

bzw. $\hat{\Delta}_{N,2}(\sqrt{t+1,1})$ und $\hat{\Delta}_{N,4}(\sqrt{t+1,1})$ für $N = 5,6,\dots,12$

nur etwa $\frac{1}{5}$ bis $\frac{2}{3}$ so groß wie $\Delta_{N,2}(\sqrt{t+1,1})$ (s. Tabelle 4).

Bei den Funktionen

$$\frac{e^{10t}}{10000}, \quad \frac{-0,1}{t-1,1}, \quad , \quad \left|t + \frac{1}{2}\right|^3 \quad \text{und} \quad (\arccos t)^2$$

konvergierte das im Programm III verwendete Newton-Verfahren zur Bestimmung des Polynoms bester Approximation nur für wenige Grade bzw. überhaupt nie, sodaß man keine sinnvollen Ergebnisse erhält.

Die Anwendungsmöglichkeit des Verfahrens III dürfte sich darauf beschränken, bei der Berechnung der Polynome bester Approximation an ein und dieselbe Funktion für aufeinander folgende Grade Ausgangsreferenzen für den Remez-Algorithmus zu liefern; aber auch dann ist das Verfahren III gegenüber Verfahren I wohl nur bei Funktionen von Vorteil, die in $[-1,1]$ reell-analytisch, aber keine ganzen Funktionen sind.

Tabelle 4 (zu Verfahren III)

$$f(t) = \sqrt{t+1}, 1$$

n	$\Delta_{n,2}(f)$	$\tilde{\Delta}_{n,2}(f)$	$\tilde{\Delta}_{n,4}(f)$
2	$2,208 \cdot 10^{-3}$	$2,506 \cdot 10^{-2}$	$2,506 \cdot 10^{-2}$
4	$2,142 \cdot 10^{-2}$	$2,934 \cdot 10^{-2}$	$2,765 \cdot 10^{-2}$
6	$3,885 \cdot 10^{-2}$	$2,773 \cdot 10^{-2}$	$2,138 \cdot 10^{-2}$
8	$4,720 \cdot 10^{-2}$	$2,525 \cdot 10^{-2}$	$1,891 \cdot 10^{-2}$
10	$6,854 \cdot 10^{-2}$	$2,966 \cdot 10^{-2}$	$1,764 \cdot 10^{-2}$
12	$8,264 \cdot 10^{-2}$	$3,242 \cdot 10^{-2}$	$1,565 \cdot 10^{-2}$
14	$9,057 \cdot 10^{-2}$	$3,374 \cdot 10^{-2}$	$1,377 \cdot 10^{-2}$
16	$9,516 \cdot 10^{-2}$	$3,475 \cdot 10^{-2}$	$1,273 \cdot 10^{-2}$

Zu IV)

Das Verfahren IV liefert rekursiv $2n$ Näherungspolynome $\hat{p}_{n,l}$ und $\hat{\tilde{p}}_{n,l}$ ($l = 1, \dots, n$), und es ist zu untersuchen, ob eines dieser Polynome im Rahmen der Rechengenauigkeit mit dem Polynom bester Approximation übereinstimmt, da dieses Verfahren dem Rechenaufwand nach (beim Schritt von l auf $l+1$) etwa einem Schritt des Newton-Verfahrens (angewandt auf die Bestimmung der Tschebyscheff-Approximation) vergleichbar ist.

Allgemein liefert dabei das mit den verbesserten Koeffizienten

$$c_j + \sum_{\mu=1}^l a_{j,\mu} \quad \text{berechnete Polynom} \quad \hat{\tilde{p}}_{n,l}$$

eine wesentlich schlechtere Näherung als das entsprechende $\hat{p}_{n,l}$, und zwar oft eine schlechtere Näherung als $\hat{p}_{n,l-1}$. Wir führen die Bezeichnung $\hat{L}_{n,l}(f)$ für das gemäß §1, S.26 zu den Punkten $\hat{x}_{j,l}$ ($j = 0, 1, \dots, n+1$) gebildete Funktional ein sowie die Bezeichnung

$$\hat{\Delta}_{n,l}(f) := \frac{||f - \hat{p}_{n,l}|| - |\hat{L}_{n,l}(f)|}{|\hat{L}_{n,l}(f)|}.$$

Für die Funktionen e^t , $\frac{-1}{t-2}$ und $\sin \pi t + \frac{0,1}{t-2}$ (hier nur bei geradem Grad) liegt schon $\Delta_{n,1}(f)$ etwa zwischen 10^{-4} und 10^{-7} , und eine Vergrößerung von l

ergibt nur für die beiden letzteren Funktionen eine wesentliche Verkleinerung von $\hat{\Delta}_{n,\ell}(f)$.

Dagegen haben $\hat{\Delta}_{n,\ell}(\sqrt{t+1}, 1)$ und $\hat{\Delta}_{n,\ell}\left(\frac{-0,1}{t-1}, 1\right)$ etwa die Größenordnung $10^{-\ell}$, wenn $\ell \leq \min\{n, 7\}$ und $n \leq 10$ gilt; für größere n allerdings wird die erreichbare Güte der Näherungspolynome $\hat{p}_{n,\ell}$ geringer (s. Tabelle 5).

Bei den in $[-1, 1]$ nicht reell-analytischen Funktionen

$|t|^3$, $(\arccos t)^2$, $\left|t + \frac{1}{2}\right|^3$ ist die Annäherung erheblich schlechter; für niedrige Grade ($n \leq 10$)

gilt im allgemeinen

$$\hat{\Delta}_{n,\ell}(f) > 10^{-3} \quad \forall \ell \in \{1, \dots, n\},$$

für Grade $n \geq 12$ gilt zumeist

$$\hat{\Delta}_{n,\ell}(f) > 10^{-1} \quad \forall \ell \in \{1, \dots, n\},$$

und von einem gewissen ℓ ab wächst $\hat{\Delta}_{n,\ell}(f)$ wieder an.

Das Verfahren liefert also nur für reell-analytische Funktionen und nur bei Graden ≤ 10 zufriedenstellende Ergebnisse. Man kann auch nicht feststellen, welchen Anteil an $\hat{\Delta}_{n,\ell}(f)$ die Rundungsfehler haben, da die Konvergenz von $\|f - \hat{p}_{n,\ell}\|$ gegen $E_n(f)$ mit wachsendem ℓ auch für reell-analytische Funktionen theoretisch nicht gesichert ist.

Tabelle 5 (zu Verfahren IV)

a) $f(t) = \frac{-1}{t-2}$

n	$\hat{\Delta}_{n,1}(f)$	$\hat{\Delta}_{n,2}(f)$	$\hat{\Delta}_{n,3}(f)$	$\hat{\Delta}_{n,4}(f)$
4	$1,344 \cdot 10^{-3}$	$2,294 \cdot 10^{-5}$	$\approx 3,5 \cdot 10^{-9}$	$\approx 6,4 \cdot 10^{-9}$
6	$1,605 \cdot 10^{-3}$	$3,772 \cdot 10^{-5}$	$\approx 6,5 \cdot 10^{-8}$	$\approx 4,4 \cdot 10^{-8}$
8	$2,199 \cdot 10^{-3}$	$4,360 \cdot 10^{-5}$	$2,299 \cdot 10^{-6}$	$3,51 \cdot 10^{-7}$
10	$2,296 \cdot 10^{-3}$	$1,693 \cdot 10^{-4}$	$1,706 \cdot 10^{-4}$	$1,773 \cdot 10^{-4}$
12	$8,927 \cdot 10^{-3}$	$2,647 \cdot 10^{-3}$	$2,503 \cdot 10^{-2}$	$1,326 \cdot 10^{-2}$

b) $f(t) = \frac{-0,1}{t-1,1}$

n	$\hat{\Delta}_{n,1}(f)$	$\hat{\Delta}_{n,2}(f)$	$\hat{\Delta}_{n,3}(f)$	$\hat{\Delta}_{n,4}(f)$	$\hat{\Delta}_{n,5}(f)$
4	$9,948 \cdot 10^{-2}$	$1,151 \cdot 10^{-2}$	$1,810 \cdot 10^{-3}$	$3,870 \cdot 10^{-4}$	—
6	$1,248 \cdot 10^{-1}$	$1,959 \cdot 10^{-2}$	$3,359 \cdot 10^{-3}$	$6,424 \cdot 10^{-4}$	$\approx 6,9 \cdot 10^{-8}$
8	$1,230 \cdot 10^{-1}$	$2,334 \cdot 10^{-2}$	$4,745 \cdot 10^{-3}$	$9,954 \cdot 10^{-4}$	$1,486 \cdot 10^{-5}$
10	$1,391 \cdot 10^{-1}$	$2,382 \cdot 10^{-2}$	$5,481 \cdot 10^{-3}$	$1,283 \cdot 10^{-3}$	$3,049 \cdot 10^{-4}$
12	$1,560 \cdot 10^{-1}$	$2,652 \cdot 10^{-2}$	$5,683 \cdot 10^{-3}$	$1,451 \cdot 10^{-3}$	$7,773 \cdot 10^{-6}$
15	$1,621 \cdot 10^{-1}$	$3,272 \cdot 10^{-2}$	$6,395 \cdot 10^{-3}$	$6,229 \cdot 10^{-3}$	$8,787 \cdot 10^{-3}$

Zu V)

Das Verfahren von Darlington verbessert mit einem "Rückwurf" die bei T_n abgebrochene Entwicklung $S_n^T f$ von f nach Tschebyscheff - Polynomen, und da die Berechnung von $S_n^T f$ numerisch recht stabil ist, kann man hohe Polynomgrade verwenden ($n \leq 49$ in den Rechenbeispielen). Es treten jedoch auch Fälle auf, in denen $||f - p_{n,m}^*||$ für gewisse Grade n mit wachsendem m nicht monoton fällt bzw. wie bei der Funktion $\sin \pi t + \frac{0,1}{t-2}$ sogar

$$||f - S_n^T f|| < ||f - p_{n,2}^*||$$

gilt.

In der Regel nimmt $||f - p_{n,m}^*||$ mit wachsendem n bis zum maximalen verwendeten Grad oder bis $||f - p_{n,m}^*|| \approx 10^{-9}$ ab, während aufgrund numerischer Instabilität $||f - p_{n,2,f}||$ ab $n \approx 20$ in vielen Fällen wieder zunimmt (s. Tabellen 6 und 7).

Bei den üblicherweise verwendeten Polynomgraden ist dagegen $p_{n,m}^*$ meist eine schlechtere Näherung an f als $p_{n,2,f}$; insbesondere bei Funktionen mit stark abfallender Koeffizientenfolge wie e^t und $\frac{-1}{t-2}$ ist

$||f - p_{n,m}^*|| = E_n(f)$ auch für das optimale verwendete m um einen Faktor bis etwa hundert größer als

$$||f - p_{n,2,f}|| = E_n(f) \quad (\text{s. Tabelle 6}) .$$

Tabelle 6 (zu Verfahren V)

a) $f(t) = \frac{-0,1}{t-1,1}$

n	$ f-p_{n,2}^* $	$ f-p_{n,3}^* $	$ f-p_{n,4}^* $	$E_n(f)$	$ f-p_{n,2,f} $
2	$2,8642 \cdot 10^{-1}$	$2,6008 \cdot 10^{-1}$	$2,4929 \cdot 10^{-1}$	$1,9611 \cdot 10^{-1}$	$1,9611 \cdot 10^{-1}$
4	$1,1723 \cdot 10^{-1}$	$1,0517 \cdot 10^{-1}$	$1,0401 \cdot 10^{-1}$	$8,0765 \cdot 10^{-2}$	$8,3062 \cdot 10^{-2}$
6	$4,8209 \cdot 10^{-2}$	$4,3697 \cdot 10^{-2}$	$4,2943 \cdot 10^{-2}$	$3,3262 \cdot 10^{-2}$	$3,4886 \cdot 10^{-2}$
8	$1,9847 \cdot 10^{-2}$	$1,7989 \cdot 10^{-2}$	$1,7651 \cdot 10^{-2}$	$1,3698 \cdot 10^{-2}$	$1,4358 \cdot 10^{-2}$
10	$8,1729 \cdot 10^{-3}$	$7,4041 \cdot 10^{-3}$	$7,2780 \cdot 10^{-3}$	$5,6414 \cdot 10^{-3}$	$5,9696 \cdot 10^{-3}$
12	$3,3658 \cdot 10^{-3}$	$3,0497 \cdot 10^{-3}$	$2,9959 \cdot 10^{-3}$	$2,3233 \cdot 10^{-3}$	$2,4908 \cdot 10^{-3}$
16	$5,7086 \cdot 10^{-4}$	$5,1725 \cdot 10^{-4}$	$5,0819 \cdot 10^{-4}$	$3,9405 \cdot 10^{-4}$	$4,2388 \cdot 10^{-4}$
20	$9,6822 \cdot 10^{-5}$	$8,7729 \cdot 10^{-5}$	$8,6193 \cdot 10^{-5}$	$6,6834 \cdot 10^{-5}$	$2,7781 \cdot 10^{-4}$

b) $f(t) = e^t$

n	$ f-p_{n,2} $	$ f-p_{n,3} $	$ f-s_{n,T}^T $	$E_n(f)$	$ f-p_{n,2,f} $
2	$4,5625 \cdot 10^{-2}$	$4,5049 \cdot 10^{-2}$	$5,0402 \cdot 10^{-2}$	$4,5017 \cdot 10^{-2}$	$4,5018 \cdot 10^{-2}$
3	$5,5757 \cdot 10^{-3}$	$5,5320 \cdot 10^{-3}$	$6,0656 \cdot 10^{-3}$	$5,5284 \cdot 10^{-3}$	$5,5284 \cdot 10^{-3}$
4	$5,5004 \cdot 10^{-4}$	$5,4688 \cdot 10^{-4}$	$5,9131 \cdot 10^{-4}$	$5,4667 \cdot 10^{-4}$	$5,4667 \cdot 10^{-4}$
5	$4,5414 \cdot 10^{-5}$	$4,5217 \cdot 10^{-5}$	$4,8386 \cdot 10^{-5}$	$4,5206 \cdot 10^{-5}$	$4,5206 \cdot 10^{-5}$
6	$3,2223 \cdot 10^{-6}$	$3,2114 \cdot 10^{-6}$	$3,4091 \cdot 10^{-6}$	$3,2110 \cdot 10^{-6}$	$3,2110 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 6 (zu Verfahren V)

c) $f(t) = (\arccos t)^2$

n	$ f-p_{n,2}^* $	$ f-p_{n,3}^* $	$ f-p_{n,4}^* $	$ f-p_{n,2,f}^* $	$E_n(f)$
2	1,446001	1,346770	1,084835	0,858202	0,837618
4	0,825817	0,778185	0,695010	0,501764	0,434128
6	0,576941	0,552893	0,486930	0,380351	0,291582
8	0,441105	0,452845	0,386636	0,311985	0,219270
15	0,247071	0,241783	0,227623	0,195321	
21	0,175824	0,172884	0,164930	0,151114	
23	0,159822	0,157315	0,150525	0,190802	
31	0,115052	0,113560	0,109498	276,3475	

Tabelle 7 (zu Verfahren V)

$$f(t) = -0,1 \cdot (t-1,1)^{-1}$$

n	$ f-p_{n,4}^* $	$E_n(f)$
25	$9,3814 \cdot 10^{-6}$	$7,2744 \cdot 10^{-6}$
30	$1,0209 \cdot 10^{-6}$	$7,9178 \cdot 10^{-7}$
35	$1,1110 \cdot 10^{-7}$	$8,6180 \cdot 10^{-8}$
40	$1,1929 \cdot 10^{-8}$	$9,3802 \cdot 10^{-9}$
45	$1,5479 \cdot 10^{-9}$	$1,0210 \cdot 10^{-9}$
49	$4,6963 \cdot 10^{-10}$	$1,7316 \cdot 10^{-10}$

Zusammenfassend kann man also sagen, daß alle hier untersuchten Verfahren (auch die Verfahren IV und V, in denen ein größerer Rechenaufwand nötig ist) ein iteratives Verfahren zur beliebig genauen Bestimmung der besten Tschebyscheff - Approximation durch Polynome, wie etwa den Remez-Algorithmus, nicht ersetzen können, daß aber einige davon, wie z.B. das auf der Voriterationsformel beruhende Verfahren I und in gewissem Maße auch das Verfahren III, gute Ausgangsnäherungen für ein solches Iterationsverfahren liefern.

Das Verfahren I mit $m = 2$ liefert darüber hinaus für kleine Grade und hinreichend "reguläre" Funktionen unter der Voraussetzung (6) oft das Polynom bester Approximation mit relativ großer Genauigkeit.

Das Verfahren von Darlington dagegen, das bei niedrigen Graden recht schlechte Ergebnisse liefert, könnte vielleicht Verwendung finden bei der Approximation durch Polynome sehr hoher Grade, wie sie in gewissen Problemen der Elektrotechnik benötigt wird.

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

A c h i e s e r , Naum Iljitsch

- [31] Ob odnoj minimum - probleme teorii funkcij
i o čisle kornej algebraičeskogo uravnenija,
kotorie ležat wnutri ediničnogo kruga.
Iswestija Akademij Nauk SSSR (otd.mat.i
estestw.nauk) 1931, S. 1169 - 1189.
- [67] Vorlesungen über Approximationstheorie.
2. Aufl. Berlin 1967.

B e r n s t e i n , Sergej N.

- [26] Leçons sur les propriétés extrémales et la
meilleure approximation des fonctions
analytiques d'une variable réelle.
Paris 1926.
- [31] Sur la limitation des valeurs d'un polynôme
 $P_n(x)$ de degré n sur tout un segment par
ses valeurs en $n + 1$ points du segment.
Iswestija Akademij Nauk SSSR (otd.mat.i
estestw. nauk) 1931, S.1025 - 1050.

B i n h L a m and David E l l i o t t

- [72] On a conjecture of C. W. Clenshaw.
SIAM Journal on Numerical Analysis.
Bd.9, 1972, S. 44 - 52.

C h e n e y , E. W.

[66] Introduction to Approximation Theory.

New York u.a.: Mc Graw-Hill 1966.

C h e n e y , E. W. and K. H. P r i c e

[70] Minimal Projections.

In: Approximation Theory. Proceedings of a
symposium held at Lancaster, July 1969,
A.Talbot ed.,
London, New York: Academic Press 1970.
(S. 261 - 289.)

[70a] Minimal interpolating projections.

In: Iterationsverfahren, Numerische Mathematik,
Approximationstheorie. S.115 - 121.
Hrsg.: L. Collatz, G. Meinardus, H. Unger
und H. Werner.
Basel u. Stuttgart: Birkhäuser Verl. 1970.

C l e n s h a w , C. W.

[64] A Comparison of "best" polynomial approximation
with truncated Chebyshev series expansion.

SIAM Journal on Numerical Analysis.

Bd.1, 1964, S.26 - 37.

D a r l i n g t o n , Sidney J.

[70] Analytical Approximation to Approximations in
the Chebyshev Sense.

The Bell System Technical Journal.

Bd.49, 1970, S.1 - 32.

F e j é r , Leopold

- [27] Über gewisse Minimumprobleme der Funktionen-
theorie.

Mathematische Annalen. Bd.97,1927, S.104 - 123.

G e d d e s , K. O. and J. C. M a s o n

- [75] Polynomial Approximation by projections on the
unit circle.

SIAM Journal on Numerical Analysis.

Bd.12, 1975, S. 111 - 120.

G r a d s h t e y n , I. S. and I. M. R y z h i k

- [65] Table of Integrals, Series and Products.
(Translated from the 4th Russian edition.)

New York and London: Academic Press 1965.

H i r z e b r u c h , Friedrich, Winfried S c h a r l a u

- [71] Einführung in die Funktionalanalysis.

Mannheim, Wien, Zürich: Bibliogr.Inst. 1971.

(Hochschultaschenbuch Nr.296.)

H o r n e c k e r , Georges

- [60] Méthodes pratiques pour la détermination
approchée de la meilleure approximation
polynômiale ou rationnelle.

Chiffres, Bd.4, 1960, S. 193 - 228.

J u n g e n , R.

- [31] Sur les séries de Taylor n'ayant que des
singularités algébriques-logarithmiques sur

leur cercle de convergence.

Comm.Math.Helvet., Bd.3, 1931, S.266 - 306.

K l o t z , Volker

- [74] Polynomiale und rationale Tschebyscheff-
Approximation in der komplexen Ebene.
Dissertation Erlangen. 1974.

M e i n a r d u s , Günter

- [62] Über Tschebyscheffsche Approximationen,
Archive for Rational Mechanics and
Analysis. Vol.9,1962. S.329 - 351.
[67] Approximation of Functions: Theory and
Numerical Methods.
Berlin,Heidelberg,New York: Springer Verl.1967.

R i o r d a n , John

- [58] An Introduction to Combinatorial Analysis.
New York, London, Sidney: John Wiley 1958.

R i v l i n , Theodore J.

- [74] The Chebyshev Polynomials.
New York, London, Sidney: John Wiley 1974.

S c h ö n h a g e , Arnold

- [71] Approximationstheorie.
Berlin, New York: de Gruyter 1971.

S p e c h t , Wilhelm

- [58] Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.
Bd.I, 1.Teil, 8.: Algebraische Gleichungen mit
reellen oder komplexen Koeffizienten.
Stuttgart: Teubner 1958.

V a r g a , Richard S.

- [62] Matrix Iterative Analysis.
Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall 1962.

W e b e r , Heinrich

- [1898] Lehrbuch der Algebra, Band I.
2. Aufl. 1898. Reprint der Chelsea Publ.Comp.,
New York.

Lebenslauf

Am 30. Juni 1943 wurde ich als Sohn des Arztes Dr. Willy Hollenhorst und seiner Ehefrau Ingeborg, geb. Drenkmann, in Bonn geboren. Von Ostern 1949 bis Ostern 1953 besuchte ich die Volksschule und danach bis zum Abitur im Februar 1962 die Ernst-Moritz-Arndt-Schule, ein mathematisch-naturwissenschaftliches Gymnasium, in Bonn.

Vom Sommersemester 1962 bis zum Sommersemester 1970 studierte ich an der Universität Bonn Mathematik und als Nebenfach Physik, wobei ich Vorlesungen u.a. bei den Herren Professoren Krull, Schöneborn, Unger, Erwe, Hirzebruch, Dombrowski, Tits, Klingenberg, Schock und Fenske hörte. Am 30. Januar 1969 erhielt ich das Diplom in Mathematik aufgrund einer unter Leitung von Herrn Prof. Dr. H. Unger angefertigten Arbeit aus dem Gebiet der Approximationstheorie und war anschließend als wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn beschäftigt.

Seit dem 1. August 1970 bin ich als Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Erlangen-Nürnberg tätig, wo auf Anregung von Herrn Prof. Dr. G. Meinardus auch die vorliegende Arbeit entstanden ist. Seit dem 1. September 1972 bin ich mit Maria Hollenhorst, geb. Malorny, verheiratet.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990